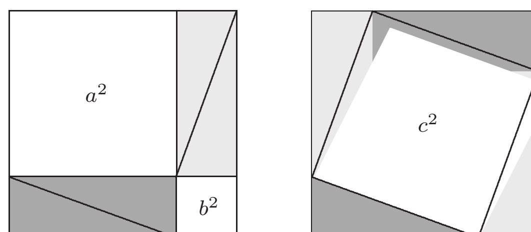
Preparação para o Cálculo



S. **DRUCK**
SAPONGA
M.E. **GOMES**

2006

Sumário

1

Conjuntos

O que é um *conjunto* ?
É qualquer coleção de objetos.

- A coleção formada pelos *algarismos* *0* , *3* , *5* , *9* ;
- A coleção dos *planetas do nosso sistema solar* ;
- A coleção dos *livros da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro* ;
- A coleção formada pelos *números reais*.

Nesses exemplos os objetos que compõem os conjuntos estão escritos em itálico. Eles também são ditos *elementos* do conjunto.

Quando respondemos a pergunta acima dizendo que um conjunto é qualquer coleção de objetos nós não estamos definindo o que é um conjunto, nem o que é um elemento desse conjunto. Nós apenas apresentamos sinônimos para essas palavras: coleção e objeto, respectivamente. Sinônimos que nos são mais familiares, que fazem parte do nosso cotidiano. As noções de conjunto e de elemento de um conjunto são *primitivas*. Não as definimos em matemática.

1 Pertinência

Dados um objeto b e um conjunto A escrevemos:

$b \in A$ (lê-se: b *pertence* a A)

para indicar que o objeto b é elemento do conjunto A.

$b \notin A$ (lê-se: b *não pertence* a A)

para indicar que o objeto b não é elemento do conjunto A.

A barra inclinada "/" colocada sobre um símbolo, regra geral, tem como objetivo negar o que o símbolo em questão representa. Isso será feito com freqüência ao longo desse texto.

Exemplos

❄ Seja A o conjunto formado pelos números -4 ; 2 ; π e 5. Temos que:
$-4 \in A$; $2 \in A$; $3 \notin A$; $5 \in A$; $\pi \in A$; $0 \notin A$.

❄ Seja B o conjunto dos números ímpares. Então:
$2 \notin B$; $7 \in B$; $3 \in B$; $-2 \notin B$; $-8 \notin B$; $-5 \in B$.

2 Como descrever conjuntos

Conjuntos são formados por elementos, por isso, para *descrever* um conjunto precisamos declarar com precisão quais são os seus elementos. Faremos isso de duas maneiras:

1. *Listando entre chaves todos os elementos do conjunto*:

$$A = \{1, 2, -3, 5, 8, 7, -11, 10\} \quad ; \quad B = \{a, e, i, o, u\}.$$

2. *Explicitando as propriedades que caracterizam os elementos do conjunto*:

C é o conjunto dos *países da América do Sul*;

D é o conjunto dos *números inteiros positivos*.

A propriedade $\mathcal{P}$ que caracteriza os elementos do conjunto C é:

$\mathcal{P}$: *ser país da América do Sul.*

Assim, $x \in C$ é o mesmo que

x *é país da América do Sul.*

A propriedade $\mathcal{P}$ que caracteriza os elementos do conjunto D é:

$\mathcal{P}$: *ser número inteiro e positivo.*

Logo, $x \in D$ é o mesmo que

x *é número inteiro e positivo.*

Nesse caso, usaremos a notação

$$\{\, x \; ; \; x \text{ tem a propriedade } \mathcal{P} \,\}$$

lida como: conjunto dos x *tais que*[1] x tem a propriedade $\mathcal{P}$.

[1]Usamos ";" com o significado de "*tal que*". Com o mesmo significado, também são usados "|" e ":".

Fazendo uso desta notação, escrevemos:

$C = \{ x ; \ x \ \textit{é país da América do Sul} \} \ ; \ D = \{ x ; \ x \ \textit{é número inteiro e positivo} \}$.

Exemplos

- Se Y é o conjunto dos *atletas olímpicos*, então escrevemos: $Y = \{y \ ; \ y \ \textit{é atleta olímpico}\}$.
- Se X é o conjunto formado pelas *soluções da equação* $x^2(x-1) = 0$ então podemos escrever: $X = \{x \ ; \ x^2(x-1) = 0\}$.
- Se X é o conjunto dos *números inteiros maiores do que* 1 *e menores do que* 9 podemos escrever: $X = \{x \ ; \ x \ \textit{é número inteiro maior do que } 1 \textit{ e menor do que } 9\}$ ou $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

3 Igualdade

Definição: Dois conjuntos são *iguais* quando têm exatamente os mesmos elementos.

Quando A e B são iguais escrevemos $A = B$. Caso contrário, escrevemos $A \neq B$.

Exemplos

- Sejam $A = \{0, -1, 2, 6, -3, 4, 3\}$ e $B = \{3, 2, 6, -1, 4, 0, -3, 3\}$.
Os elementos dos conjuntos A e B estão listados em ordem diferente. Além disso, o elemento 3 foi listado duas vezes no conjunto B. No entanto, *de acordo com a definição de igualdade* esses conjuntos são iguais, pois têm exatamente os mesmos elementos, a saber: -3 , -1 , 0 , 2 , 3 , 4 e 6.
- Sejam A o conjunto dos *números ímpares maiores do que 1* e B o conjunto dos *números ímpares maiores ou iguais a 7*. Os conjuntos A e B não são iguais porque não possuem exatamente os mesmos elementos. De fato, $5 \in A$ porém $5 \notin B$. Nesse caso, escrevemos $A \neq B$.

4 Conjuntos especiais

4.1 Conjunto universo

Considere o seguinte conjunto: $\{ x \ ; \ x > 0 \}$. Note que esse conjunto não está descrito de modo claro. Afinal de contas, de quais números maiores do que zero estamos falando?

– Dos números *pares* maiores do que zero?

– Dos números *inteiros* maiores do que zero?

– Dos números *racionais* maiores do que zero?

– Ou dos números *reais* maiores do que zero?

Para descrever o conjunto $\{ x \; ; \; x > 0 \}$, sem ambiguidade, precisamos dizer onde vamos procurar os elementos x que são maiores do que zero.

- Se vamos procurá-los no conjunto $\mathcal{P}$ dos números pares, escrevemos:

$$\{x \in \mathcal{P} \; ; \; x > 0\}.$$

- Se vamos procurá-los no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros, devemos escrever:

$$\{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x > 0\}.$$

- Se vamos procurá-los no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, escreveremos:

$$\{x \in \mathbb{Q} \; ; \; x > 0\}.$$

- Se vamos procurá-los no conjunto $\mathbb{R}$ dos reais, será necessário escrever:

$$\{x \in \mathbb{R} \; ; \; x > 0\}.$$

Agora sim, temos conjuntos descritos sem ambiguidade, pois dissemos em cada um deles onde vamos procurar os elementos que são maiores do que zero.

Mais geralmente, seja $\mathcal{U}$ um conjunto qualquer. O conjunto formado pelos elementos de $\mathcal{U}$ que têm a propriedade $\mathcal{P}$ será escrito na forma

$$\{x \in \mathcal{U} \; ; \; x \textit{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$$

e o conjunto $\mathcal{U}$ será dito um *conjunto universo*.

Nos exemplos acima os conjuntos universo são, respectivamente: $\mathcal{P}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Algumas vezes descreveremos conjuntos sem explicitar o conjunto universo de onde os seus elementos foram retirados mas, isso só será feito quando não houver ambiguidade na descrição do conjunto. Isso quer dizer que em algum momento da discussão o conjunto universo foi, ou será, informalmente fixado.

4.2 Conjunto vazio

O conjunto que não tem elementos é chamado *conjunto vazio* e é denotado por $\emptyset$ ou $\{ \; \}$. Por exemplo, o conjunto formado pelos *países que ganharam 7 vezes a Copa do Mundo de Futebol* é o conjunto vazio.

O conjunto vazio pode ser descrito através de propriedades que se contradizem. Por exemplo:

$$\{x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 < 0\} = \emptyset \qquad ; \qquad \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x > 0 \text{ e } x < 1\} = \emptyset.$$

4.3 Conjunto unitário

Os *conjuntos unitários* são aqueles formados por *um único elemento*. O conjunto dos *países que ganharam 5 vezes a Copa do Mundo de Futebol* é um conjunto unitário pois seu único elemento é o Brasil.

Exemplos

❄ Conjuntos unitários:
$\{0\}$; $\{10\}$; $\{-4\}$; $\{-2,-2\}$; $\{x \in \mathbb{R} \, ; \, x^3 = 1\}$; $\{n \in \mathbb{Z} \, ; \, 2 < n < 4\}$.

❄ Conjuntos não unitários:
$\{2,-2\}$; $\{-1,2,3\}$; $\emptyset$; $\{x \in \mathbb{R} \, ; \, x^2 = 1\}$; $\{z \in \mathbb{R} \, ; \, 1 < z < 2\}$.
Cada um dos conjuntos no exemplo acima possui mais do que um elemento, salvo o conjunto vazio que não possui elementos.

5 Conjuntos finitos

Os conjuntos

$$\underbrace{\{5\}}_{\text{1 elemento}} \; ; \; \underbrace{\{-1,0,2\}}_{\text{3 elementos}} \; ; \; \underbrace{\{3,2,0,-1\}}_{\text{4 elementos}} \; ; \; \underbrace{\{1,2,-1,4,15,-3,9\}}_{\text{7 elementos}}$$

têm uma importante propriedade em comum: podemos *contar* todos os seus elementos, "do primeiro, ao último". Dizemos que tais conjuntos são *finitos*. Mais precisamente: um conjunto é *finito* quando podemos contar *todos* os seus elementos, *iniciando* a contagem em 1 (aliás, como sempre fazemos quando contamos objetos) e *terminando* a contagem em algum inteiro positivo n. Nesse caso, dizemos que o conjunto é um *conjunto finito com* n *elementos* ou, simplesmente, que o conjunto tem n elementos.

Evidentemente, devemos contar cada elemento *uma única vez*, para poder afirmar que n é o número exato de elementos do conjunto. O número de elementos de um conjunto finito A é denotado por $\#(A)$.

Exemplos

❄ $A = \{3,4,5,6,7,8,9\}$ é um conjunto finito com 7 elementos. Logo $\#(A) = 7$.

❄ $B = \{x \in \mathbb{Z} \, ; \, x \geq 0 \text{ e } x \leq 10\}$ é um conjunto finito com 11 elementos. Assim, $\#(B) = 11$.

❄ O conjunto de todas as estrelas do Universo em que vivemos é um conjunto com uma quantidade muito grande de elementos mas é *finito*, segundo os cientistas.

Observe que o conjunto vazio não se enquadra na noção de conjunto finito que acabamos de apresentar, pois ele *não tem elementos a serem contados*. No entanto, convencionamos que o *conjunto vazio é finito* e tem *zero elementos*.

Quando um conjunto A não é finito ele é dito um *conjunto infinito* ou um *conjunto com uma infinidade de elementos*. Nesse caso, escrevemos que $\#(A) = \infty$. Escrevemos $\#(A) < \infty$ para indicar que A é um conjunto finito.

Para finalizar, chamamos sua atenção para o seguinte fato: quando contamos os elementos de um conjunto finito, o resultado final da contagem independe da ordem em que os elementos do conjunto foram contados. Dito informalmente: *independe de quem os contou*. Esse é um resultado a ser demonstrado mas, não o faremos aqui.

No entanto, não é difícil mostrar que a união, a interseção, o produto cartesiano e a diferença de dois conjuntos finitos, são conjuntos finitos. Veja a solução do exercício 12 na página 20 e tente fazer algo parecido para demonstrar esses resultados.

Você encontrará uma definição formal de conjunto finito nas referência [5, 6].

Exemplos de conjuntos infinitos

❄ Conjunto dos números pares ;

❄ Conjunto dos múltiplos positivos de 5 ;

❄ Conjunto dos números ímpares que são maiores do que 223 ;

❄ Conjunto dos números da forma $\frac{1}{n}$ onde n é um inteiro positivo ;

❄ Conjunto dos números da forma $n\sqrt{2}$ onde n é um inteiro negativo ;

❄ Conjunto dos números da forma 100^n onde n é um inteiro negativo.

Veja como demonstrar que o conjunto dos números pares não é finito no exercício 11 da página 20. Não será difícil adaptar aquela prova para mostrar que todos os outros conjuntos da lista acima são, de fato, conjuntos infinitos.

5.1 A notação "..."

Usamos a notação "..." no papel da expressão *e assim por diante*, que pressupõe: *o leitor sabe como prosseguir*. Por exemplo, escrevemos que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

para indicar que depois do 4 vem 5 , depois 6 , 7 e assim por diante; que antes do -4 vem -5 , -6 e assim por diante.

Também escrevemos, por exemplo, $\{-12, -10, -8, \ldots, 206, 208, 210\}$ para evitar de escrever todos os números pares de -12 à 210 . Para indicar o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, isto é, dos inteiros positivos, escrevemos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Exemplos

❄ Para indicar que n assume todos os valores inteiros não negativos, escrevemos, por exemplo,

$$n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{ou então} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

❄ Para indicar que m assume todos os valores inteiros, podemos escrever: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

❄ Para indicar que k assume todos os números pares, podemos escrever: $k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$

❄ Na lista ordenada $2^3, 3^4, 4^5, 5^6, \ldots$ temos que:

– o $6^{\underline{o}}$ elemento é: 7^8 – o $10^{\underline{o}}$ elemento é: 11^{12} – o $1102^{\underline{o}}$ elemento é: 1103^{1104}.

❄ A lista $1, 2, 2^2, 2^4, 2^6, \ldots, 2^k$ possui 121 elementos. Qual o valor do inteiro k?

Vejamos: a descrição a seguir lista os 121 elementos acima referidos

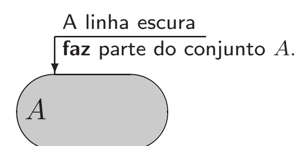
$$1\,,\ 2\,,\ \underbrace{2^{\mathbf{1}\times 2}\,,\ 2^{\mathbf{2}\times 2}\,,\ 2^{\mathbf{3}\times 2}\,,\ \ldots\,,\ 2^{\mathbf{119}\times 2}}_{119\ elementos}.$$

Isso nos permite concluir que $k = 119 \times 2 = 238$.

6 Diagrama de Venn

Como representar conjuntos graficamente ? Como vizualizá-los ?

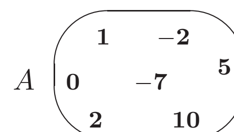
Uma maneira de vizualizar conjuntos *infinitos* é pensar neles como se fossem *regiões do plano*. A figura ao lado mostra uma dessas representações. O conjunto A é formado pelos pontos da região hachurada. Do conjunto A também faz parte a linha escura que delimita a região hachurada.



Essas representações gráficas são chamadas *diagramas de Venn*. Veremos que elas também servem para representar graficamente conceitos (como inclusão, união, interseção, etc) e *testar* a validade de afirmações matemáticas, como veremos no decorrer dessa lição .

Os diagramas de Venn também são usados para representar conjuntos *finitos*. Neste caso desenhamos regiões do plano e representamos no interior dessas regiões apenas os objetos que constituem os conjuntos em questão. Por exemplo, na figura ao lado representamos o conjunto

$$A = \{-7, -2, 0, 1, 2, 5, 10\}.$$



7 Inclusão

Definição: Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é *subconjunto* de B quando todo elemento de A também é elemento de B.

Quando A é subconjunto de B dizemos que A está *contido* (ou *incluído*) em B e escrevemos $A \subset B$, ou que B *contém* A e escrevemos $B \supset A$. Para indicar que A é subconjunto de B e que é distinto de B escrevemos $A \subsetneq B$.

Exemplos

❄ Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Temos que $A \subset B$ pois todo elemento de A também é elemento de B.

❄ Sejam
$A =$ conjunto dos números inteiros maiores do que 5 ;
$B =$ conjunto dos números inteiros maiores do que 11 .
Nesse caso, $B \subset A$. De fato, se $x \in B$ então $x > 11$. Logo $x > 5$. Consequentemente, $x \in A$ provando, assim, o que pretendíamos.

❄ Sejam
$A =$ conjunto dos números pares ;
$B =$ conjunto dos múltiplos de 3 .
Aqui, A *não está contido em* B pois, nem todo par é múltiplo de 3. Por exemplo, $4 \in A$ mas $4 \notin B$. Podemos também concluir que B *não está contido em* A pois, nem todo múltiplo de 3 é par. É o que se passa, por exemplo, com o número 9 : $9 \in B$ mas $9 \notin A$.

❄ Sejam
$A =$ conjunto dos triângulos retângulos ;
$B =$ conjunto dos triângulos isósceles .
O conjunto A *não está contido* no conjunto B pois, nem todo triângulo retângulo é isósceles[2]. Concluímos ainda que B *não está contido em* A pois, nem todo triângulo isósceles é retângulo.

Observação

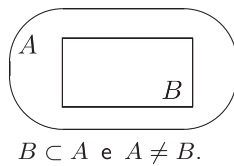
$\emptyset \subset B$ qualquer que seja o conjunto B. A justificativa para essa afirmação será apresentada na página 16.

Quando A está contido em B e $A \neq B$ dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B (exemplo 1 acima). Quando A *não está contido* em B escrevemos $A \not\subset B$ (exemplo 2 acima). Analogamente, quando B *não contém* A escreve-se: $B \not\supset A$.

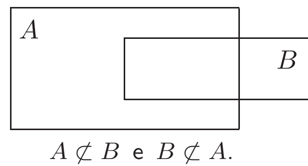
[2] Essa não é uma forma, digamos, matematicamente completa de se apresentar uma justificativa. Para bem fazê-lo, deveríamos exibir um triângulo que fosse retângulo e que não fosse isósceles. Faça-o! Idem para a afirmação a seguir, no mesmo exemplo.

Exemplos

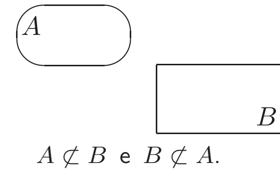
Os diagramas de Venn a seguir, representam algumas relações entre conjuntos.



$B \subset A$ e $A \neq B$.



$A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.



$A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.

7.1 Propriedades

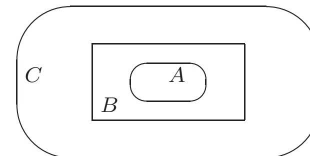
Propriedades da inclusão
1. $\boldsymbol{A \subset A}$
2. Se $\boldsymbol{A \subset B}$ **e** $\boldsymbol{B \subset A}$ **então** $\boldsymbol{B = A}$
3. Se $\boldsymbol{A \subset B}$ **e** $\boldsymbol{B \subset C}$ **então** $\boldsymbol{A \subset C}$

A afirmação *todo elemento de A também é elemento de A*, que é evidente, justifica a primeira propriedade da relação de inclusão.

A segunda propriedade fornece um critério para mostrar que dois conjuntos são iguais: *dois conjuntos são iguais quando cada um deles está contido no outro.*

A terceira propriedade é dita *propriedade transitiva.*

Na figura ao lado, usamos diagramas de Venn para vizualizar a transitividade da relação de inclusão.



Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

Conjunto das partes

A partir de um conjunto A podemos construir um novo conjunto cujos elementos são *os subconjuntos de A*. Este novo conjunto é chamado *conjunto das partes de A* e é denotado por $\mathfrak{P}(A)$. Assim,

$$\mathfrak{P}(A) := \{B \; ; \; B \subset A\}.$$

Os *elementos* de $\mathfrak{P}(A)$ são *conjuntos*; são todos os subconjuntos de A.

Às vezes usaremos o símbolo " $:=$ " que tem o mesmo significado que " $=$ ". Ele será usado para chamar a atenção de que estamos diante de uma definição.

Exemplos

❄ $A = \{1\}$.
Subconjuntos: $\emptyset$ e $\{1\}$.
$\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
$\mathfrak{P}(A)$ tem $2 = 2^1$ elementos.

❄ $A = \{1, 3\}$.
Subconjuntos: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{3\}$ e $\{1, 3\}$.
$\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$.
$\mathfrak{P}(A)$ tem $4 = 2^2$ elementos.

❄ $A = \{1, 5, 2\}$.
Subconjuntos: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{2\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 2\}$, $\{5, 2\}$ e $\{1, 5, 2\}$.
$\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{2\}, \{1, 5\}, \{1, 2\}, \{5, 2\}, \{1, 5, 2\}\}$.
$\mathfrak{P}(A)$ tem $8 = 2^3$ elementos.

❄ Se um conjunto A tem n elementos então o conjunto $\mathfrak{P}(A)$ tem 2^n elementos. Uma justificativa para este fato é apresentada no exercício 28 da página 25.

8 Operações com conjuntos

8.1 União

Definição: A *união* dos conjuntos A e B é o conjunto

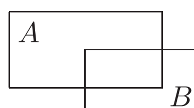
$$A \cup B := \{x \; ; \; x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

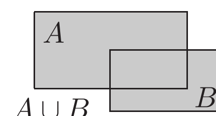
Exemplos

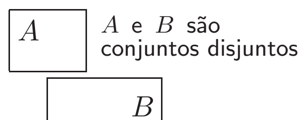
❄ $\{1, 3, 4, 7, 8\} \cup \{1, 2, 7, 18\} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 18\}$.

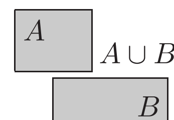
❄ $\{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x > 5\} \cup \{-4, -2, -1, 1\} = \{-4, -2, -1, 1, 6, 7, 8, \ldots\}$.

Nos diagramas de Venn ao lado a união $A \cup B$ é representada pelas regiões hachuradas.









Observação

Em nosso cotidiano é comum usar a conjunção "**ou**" com sentido *exclusivo*. O mesmo não acontece em matemática: quando afirmamos "$x \in A$ **ou** $x \in B$" podem ocorrer três possibilidades:

- ☞ x pertence *exclusivamente* a A ;
- ☞ x pertence *exclusivamente* a B ;
- ☞ x pertence *simultaneamente* aos dois conjuntos A e B.

8.2 Interseção

Definição: A *interseção* dos conjuntos A e B é o conjunto

$$A \cap B := \{x \; ; \; x \in A \;\; \textbf{e} \;\; x \in B\}.$$

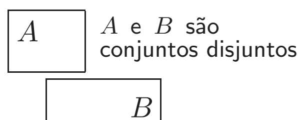
Exemplos

- ❄ $\{-1\,,0\,,1\,,3\,,4\,,7\,,8\} \cap \{-1\,,0\,,1\,,2\,,7\} = \{-1\,,0\,,1\,,7\}.$
- ❄ $\{-1\,,-2\,,5\,,7\,,8\,,9\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x < 8\} = \{-1\,,-2\,,5\,,7\}.$
- ❄ $\{0\,,2\,,4\,,6\} \cap \{1\,,3\,,5\,,7\,,9\} = \emptyset.$

Os conjuntos A e B são ditos *disjuntos* quando não possuem elementos em comum; ou seja, quando $A \cap B = \emptyset$. No exemplo 3 acima os conjuntos são disjuntos.

Nos diagramas de Venn ao lado a interseção $A \cap B$ é representada pela região de cor cinza.





$A \cap B = \emptyset$

Observação

A conjunção "**e**" tem em matemática o mesmo significado que em nosso quotidiano: o de *simultaneidade*.

8.3 Diferença

Definição: A *diferença* $A - B$ dos conjuntos A e B, é o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B, isto é,

$$A - B := \{x \; ; \; x \in A \;\; \textbf{e} \;\; x \notin B\}.$$

Também é comum a notação $A \setminus B$ para indicar a diferença $A - B$. Quando $B \subset A$ dizemos que $A - B$ é o *complementar* de B em relação a A e o denotamos por $\complement_A B$.

Exemplos

❄ $\{1, 3, 4, 5, -1, -2\} - \{2, 3, 4, -1, 0\} = \{1, 5, -2\}$.

❄ $\mathbb{Z} - \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \text{ é par}\} = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \text{ é ímpar}\}$.

❄ Como $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ temos que $\complement_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$.

8.4 Produto Cartesiano

Definição: O *produto cartesiano* $A \times B$ dos conjuntos A e B, é o conjunto dos *pares ordenados* (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$, isto é,

$$A \times B := \{(x, y)\ ;\ x \in A \ \textbf{ e } \ y \in B\}.$$

Lembre-se que dois pares ordenados (x, y) e (a, b) de $A \times B$ são *iguais* se, e somente se, $x = a$ e $y = b$. Dizemos que x e y são as *coordenadas* do par ordenado (x, y): x é a *primeira coordenada* e que y é a *segunda coordenada*.

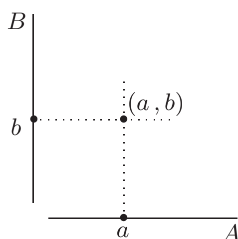
Exemplos

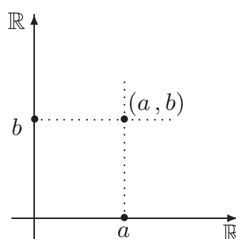
❄ $\{1, 5, -1, -2\} \times \{4, -1, 0\}$ é o conjunto formado pelos pares ordenados: $(1, 4)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(5, 4)$, $(5, -1)$, $(5, 0)$, $(-1, 4)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$, $(-2, 4)$, $(-2, -1)$, $(-2, 0)$.

❄ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é formado pelos pares ordenados da forma (m, n) onde m, n são inteiros quaisquer.

❄ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é formado pelos pares ordenados da forma (x, y) onde x, y são números reais quaisquer.

As figuras a seguir mostram representações gráficas dos conjuntos $A \times B$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ respectivamente. O conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ também é denotado por $\mathbb{R}^2$.





Quando $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dizemos que a é a sua *abcissa* e que b é a sua *ordenada*.

8.5 Propriedades das operações

Apresentamos no quadro a seguir as propriedades usuais das operações de união, de interseção e de produto cartesiano entre conjuntos.

Propriedades da união, da interseção e do produto cartesiano	
1. Idempotência:	$A \cup A = A = A \cap A$
2. Comutatividade:	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3. Associatividade:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. Distributividade:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
5. $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$ **se** $\#(A) < \infty$ **e** $\#(B) < \infty$	

É a propriedade associativa que nos permite entender $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$ sem ambiguidade. Note que a definição de união envolve apenas dois conjuntos. Assim, para dar um significado à $A \cup B \cup C$ respeitando a ordem em que A, B, C aparecem na expressão, devemos interpretá-lo como $(A \cup B) \cup C$ ou, como $A \cup (B \cup C)$. A associatividade nos garante que tanto faz, e é isso que nos permite abandonar os parênteses ao escrever $A \cup B \cup C$.

9 Quantificadores

A linguagem matemática exige o uso de dois tipos de *quantificadores*:

☞ *quantificador de universalidade*:
denotado por "$\forall$" e significando *qualquer que seja* ou *para todo* ou *todo*.

☞ *quantificador de existência*:
denotado por "$\exists$" e significando *existe* ou *existem*.

Exemplos

A afirmação	pode ser escrita como:	
Existem números inteiros negativos	$\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < 0$	$\exists\, n \in \mathbb{Z}\ ;\ n < 0$
Nem todo número inteiro é nulo	$\exists\, x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \neq 0$	$\exists\, x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \neq 0$
Existem números pares maiores que 2001	$\exists\, x \in \mathcal{P}$ tal que $x > 2001$	$\exists\, x \in \mathcal{P}\ ;\ x > 2001$
O quadrado de qualquer número inteiro é maior ou igual a zero	$x^2 \geq 0\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}$	
O dobro de qualquer número inteiro é um número par	$2y \in \mathcal{P}\ ,\ \forall\, y \in \mathbb{Z}$	
O produto de qualquer número real por zero vale zero	$b \times 0 = 0\ ,\ \forall\, b \in \mathbb{R}$	
A diferença entre dois números inteiros é um número inteiro	$a - b \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$	
A diferença entre dois números inteiros pode não ser um número par	$\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b \notin \mathcal{P}$	$\exists\, a, b \in \mathbb{Z}\ ;\ a - b \notin \mathcal{P}$

10 O significado de “ $\Longrightarrow$ ” e “ $\Longleftrightarrow$ ”

Em matemática, o símbolo “ $\Longrightarrow$ ” é usado para indicar que a afirmação à esquerda desse símbolo *implica* a afirmação à direita, como em:

$$\begin{aligned} a = 2 &\Longrightarrow a > 1\,; \\ x \geq 1 &\Longrightarrow x^2 \geq 1\,; \\ a - b = 0 &\Longrightarrow a = b\,; \\ x^2 = 0 &\Longrightarrow x = 0\,; \end{aligned}$$

onde a, b, x são números reais[3].

Quando a afirmação à esquerda implica a afirmação à direita e vice-versa, dizemos que as afirmações são *equivalentes* e usamos o símbolo “ $\Longleftrightarrow$ ” como nos exemplos a seguir.

$$\begin{aligned} 3a = 12 &\Longleftrightarrow a = 4\,; \\ a - b > 0 &\Longleftrightarrow a > b\,; \\ a - b = 2 &\Longleftrightarrow a = b + 2\,; \\ x^2 = 0 &\Longleftrightarrow x = 0\,; \end{aligned}$$

onde a, b, x são números reais.

Em cada um dos exemplos acima, a afirmação à esquerda e a afirmação à direita do símbolo “ $\Longleftrightarrow$ ” têm exatamente o mesmo significado matemático; elas apenas estão escritas de forma

[3]Nesse caso também dizemos: a afirmação à direita da seta é *consequência* da afirmação à esquerda.

diferente. O símbolo "$\Longleftrightarrow$" também é lido como: *quando, e somente quando* ou então *se, e somente se.*

Tanto a *implicação* quando a *equivalência* entre afirmações são transitivas, isto é:

- se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$;
- se $p \Leftrightarrow q$ e $q \Leftrightarrow r$ então $p \Leftrightarrow r$.

Exemplos

❄ Dados números reais a e b temos que:

$$a < 0 \iff 2a < 0\,;$$
$$a > 0 \text{ e } b > 0 \implies a + b > 0\,;$$
$$a < 0 \text{ e } b \leq 0 \implies ab \geq 0\,.$$

❄ Sejam A e B dois conjuntos disjuntos.

Temos que: $x \in A \implies x \notin B$.

❄ $x \in \{1\} \implies x \in \{1, 2\}$.

❄ Sejam A e B conjuntos tais que $A \subset B$. Temos então que:

$$x \in A \implies x \in B\,;$$
$$x \notin B \implies x \notin A.$$

❄ Seja A um conjunto qualquer.

Então: $a \in A \iff \{a\} \subset A$.

❄ $x = 1 \implies x = 1$ ou $x = 2$.

11 A negação de $A \subset B$

Compreender a negação de uma afirmação não é, em geral, uma tarefa elementar em matemática. Vejamos, passo à passo, um tal exemplo.

Dados dois conjuntos A e B quaisquer, sabemos quando A está contido em B: "*quando todo elemento de A é elemento de B*". Automaticamente, sabemos o que significa a afirmação

"*A não está contido em B*".

É a *negação* de "*A está contido em B*",

ou seja, é a negação de

"*todo elemento de A é elemento de B*".

E a negação desta última afirmação é, evidentemente,

"*nem todo elemento de A é elemento de B*"

ou, dito de outra maneira,

"*existe um elemento de A que não é elemento de B*".

Finalizando, dizer que "*A não está contido em B*" é o mesmo que dizer

"*existe $a \in A$ tal que $a \notin B$*"

ou seja,

$$\exists\ a \in A\ \ ;\ \ a \notin B.$$

É por isso que para justificar que A não está contido em B, *exibimos* um elemento de A que não está em B.

Exemplos

❄ $\mathbb{Z} \not\subset \mathcal{P}$ porque *existem números inteiros que não são pares*. Por exemplo, o número 3 é inteiro mas não é par, ou seja : $3 \in \mathbb{Z}$ mas $3 \notin \mathcal{P}$.

❄ Sejam A o conjunto de todos os países sul-americanos e B o conjunto dos países que já ganharam a Copa do Mundo de Futebol. Temos que $A \not\subset B$ porque Peru $\in A$ mas Peru $\notin B$.

❄ Se A é o conjunto dos múltiplos de 10 e B é o conjunto dos múltiplos de 4, então $A \not\subset B$ porque $30 \in A$ mas $30 \notin B$.

Depois de ter entendido o significado de $A \not\subset B$ podemos justificar o seguinte fato:

$$\emptyset \subset B \ \ \textit{qualquer que seja o conjunto } B.$$

De fato, se $\emptyset \not\subset B$ deveria existir $b \in \emptyset$ tal que $b \notin B$ o que é impossível, pois $\emptyset$ não tem elementos. Logo, $\emptyset \subset B$ qualquer que seja o conjunto B. Em particular, o complementar do conjunto vazio em relação a qualquer conjunto B está bem definido e vale: $\complement_B \emptyset = B - \emptyset = B$.

Exercícios resolvidos

1. **Verifique se o número x pertence ao conjunto A e justifique sua resposta.**

(a) A é o conjunto dos múltiplos de 3 ; $x = 1264$.

(b) A é o conjunto dos divisores de 60 ; $x = 3$.

Solução Precisamos verificar se os números dados satisfazem ou não às propriedades que caracterizam os elementos dos conjuntos em questão.

(a) A propriedade que caracteriza os elementos do conjunto A é: *ser múltiplo de 3*.
Dividindo 1264 por 3 obtemos resto 1 . Logo, 1264 não é múltiplo de 3, ou seja, $1264 \notin A$.

(b) A propriedade que caracteriza os elementos do conjunto A é: *ser divisor de 60*.
Temos que $60 \div 3 = 20$. Portanto, o número 3 é um dos divisores de 60. Logo, $3 \in B$.

2. Os números 0, -1, $7/3$ e 10^{10} pertencem ao conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ 3n-5$ é par$\}$?

Solução As propriedades que caracterizam os elementos n de A são:

• $n \in \mathbb{Z}$ e • $3n-5$ é par.

Precisamos então verificar se os números dados satisfazem ambas as condições.

(a) $0 \in \mathbb{Z}$ mas $3 \times 0 - 5 = -5$ não é par. Logo, $0 \notin A$;

(b) $-1 \in \mathbb{Z}$ e $3 \times (-1) - 5 = -8$ é par. Portanto, $-1 \in A$;

(c) $\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$. Consequentemente, $\frac{7}{3} \notin A$;

(d) $10^{10} \in \mathbb{Z}$ mas $3 \times 10^{10} - 5$ não é par. Para ver que $3 \times 10^{10} - 5$ não é par observe que 3×10^{10} é um número inteiro cujo algarismo da unidade é *zero*. Segue que o algarismo da unidade de $3 \times 10^{10} - 5$ é 5 e portanto, $3 \times 10^{10} - 5$ não é um número par[4]. Logo $10^{10} \notin A$.

3. Seja A o conjunto dos triângulos isósceles cujo perímetro vale 20. Os triângulos cujos lados são dados a seguir, pertencem ao conjunto A?

(a) T_1 é o triângulo de lados 8, 6, 6; **(b) T_2 é o triângulo de lados 9, 6, 5.**

Solução As propriedades que caracterizam os elementos de A são:

• ser triângulo isósceles (*dois lados iguais*[5]) e • ter perímetro igual a 20.

(a) T_1 tem dois lados iguais e seu perímetro vale $8+6+6=20$. Logo, T_1 é um triângulo[6] isósceles de perímetro igual a 20. Portanto, $T_1 \in A$.

(b) T_2 tem perímetro igual a 20 mas não tem dois lados iguais. Logo, T_2 não é um triângulo[7] isósceles. Portanto $T_2 \notin A$.

4. Seja $A = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x^2 > 300\}$. Quais dos números 10, -20, -17 e 25 pertencem ao conjunto A?

Solução Nesse caso temos que:

- $10 \notin A$ pois $10^2 = 100 < 300$;
- $-20 \in A$ pois $(-20)^2 = 400 > 300$;
- $-17 \notin A$ já que $(-17)^2 = 289 < 300$;
- $25 \in A$ pois $(25)^2 = 625 > 300$.

5. Os conjuntos A e B são iguais ou distintos? Justifique suas respostas.

---

[4] Como mostrar que o algarismo da unidade de um número par só pode ser $0, 2, 4, 6$ ou 8?

[5] Outra propriedade que caracteriza um triângulo como triângulo isósceles é: *ter dois ângulos iguais*.

[6] Será que existe mesmo um triângulo com essas medidas: 8 , 6 , 6 ? Você seria capaz de realizá-lo com régua e compasso? Como?

[7] Novamente, será que existe mesmo um triângulo com essas medidas: 9 , 6 , 5 ? Você seria capaz de realizá-lo com régua e compasso? Como?

(a) A é o conjunto dos inteiros pares;
B é o conjunto dos múltiplos de 4.

(b) A é o conjunto dos múltiplos de 6;
B é o conjunto dos múltiplos de 9.

(c) A é o conjunto dos triângulos isósceles;
B é o conjunto dos triângulos eqüiláteros.

(d) $A = \{x \in \mathbb{N} \; ; \; x^2 < 47\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \; ; \; x \leq 6\}$.

Solução Temos que:

(a) Existem inteiros pares que não são múltiplos de 4 como, por exemplo, o número 6. Assim $6 \in A$ mas $6 \notin B$. Consequentemente, $A \neq B$.

(b) Existem múltiplos de 6 que não são múltiplos de 9. Por exemplo: 12 é múltiplo de 6 mas, 12 não é múltiplo de 9. Isto é, $12 \in A$ mas, $12 \notin B$. Consequentemente, $A \neq B$.

(c) Existem triângulos isósceles que não são eqüiláteros[8]; é o caso, por exemplo, do triângulo T de lados $1, 2, 2$. Assim, $T \in A$ mas $T \notin B$. Logo, $A \neq B$.

(d) Temos: $1^2 < 47$, $2^2 < 47$, $3^2 < 47$, $4^2 < 47$, $5^2 < 47$, $6^2 < 47$. Por outro lado, qualquer número natural maior que 6 tem quadrado *maior* do que 47. Logo, $A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ e consequentemente,

$$A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\} = \{x \in \mathbb{N} \; ; \; x \leq 6\} = B.$$

6. Quais dos conjuntos a seguir são vazios e quais são unitários?

(a) $\{x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 + 1 = 0\}$

(b) $\{x \in \mathbb{Z} \; ; 1 = x^2\}$

(c) $\{x \in \mathbb{Z} \; ; \; 0 < x < 2\}$

(d) $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; \frac{1}{n} > 1\}$.

Solução Para isso, vejamos quantos elementos possuem cada um dos conjuntos.

(a) Se x é real, temos que $x^2 \geq 0$. Logo, $x^2 + 1 \geq 1$ e consequentemente, $\{x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$.

(b) Temos que: $\{x \in \mathbb{Z} \; ; \; 1 = x^2\} = \{-1 , 1\}$. Logo, esse conjunto tem dois elementos e portanto não é nem vazio, nem unitário.

(c) O único número inteiro maior do que zero e menor do que 2 é o número 1. Concluímos então que $\{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x > 0 \text{ e } x < 2\} = \{1\}$. Portanto, o conjunto em questão é um conjunto unitário.

(d) Se $n \in \mathbb{N}$ então $n \geq 1$. Logo, o denominador da fração $1/n$ é maior ou igual ao seu numerador. Consequentemente $1/n \leq 1$ e concluímos que o conjunto em questão é o conjunto vazio.

7. Considere o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 + 2 + \cdots + n < 30\}$. Os números 5 , 7 , 9 e 20 pertencem ao conjunto A?

Solução Temos que:

- $5 \in A$ pois $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 < 30$;
- $7 \in A$ pois $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 < 30$;

[8] Um triângulo é dito *eqüilátero* quando tem os três lados iguais. Outra propriedade que caracteriza um triângulo como triângulo eqüilátero é: *ter os três ângulos iguais.* Como a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180°, concluímos que num triângulo eqüilátero cada ângulo interno mede 60° ou, equivalentemente, $\pi/3$ radianos.

- $9 \notin A$ porque $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45>30$;
- $20 \notin A$ já que $1+2+\cdots+19+20>19+20=39>30$.

8. **Determine o número de elementos dos conjuntos a seguir.**
(a) Conjunto dos divisores de 50 ;
(b) Conjunto dos múltiplos positivos de 3 que são menores do que 2317 ;

Solução Analizemos cada um dos conjuntos.

(a) Temos que $50=2\times 5^2$. Logo, os divisores de 50 são: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10 , ± 25 , ± 50. Portanto, o conjunto dos divisores de 50 tem exatamente 12 elementos.

(b) Dividindo 2317 por 3 obtemos 772 como quociente e 1 como resto. Assim, 772×3 é o maior múltiplo de 3 que é menor do que 2317 :

$$2316 = \mathbf{772}\times 3 < 2317 < \mathbf{773}\times 3 = 2319.$$

Assim sendo, os múltiplos[9] de 3 procurados são:

$$\mathbf{1}\times 3\ ,\ \mathbf{2}\times 3\ ,\ \mathbf{3}\times 3\ ,\ \mathbf{4}\times 3\ ,\ \mathbf{5}\times 3\ ,\ \ldots\ ,\ \mathbf{772}\times 3.$$

Portanto, o conjunto em questão é finito e tem exatamente 772 elementos.

9. **Qual é o menor elemento do conjunto $A=\{n\in\mathbb{Z}^+\ ;\ 1+2+3+\cdots+n>25\}$?**

Solução Verificamos que:

$1\notin A$ pois $1<25$
$2\notin A$ pois $1+2=3<25$
$3\notin A$ pois $1+2+3=6<25$
$4\notin A$ pois $1+2+3+4=10<25$
$5\notin A$ pois $1+2+3+4+5=15<25$
$6\notin A$ pois $1+2+3+4+5+6=21<25$
$7\in A$ pois $1+2+3+4+5+6+7=28>25$.

Segue também da última linha que se n é um número inteiro maior do que 7 então o resultado da soma $1+2+3+4+5+6+7+\cdots+n$ será superior a 25 . Logo, um tal inteiro pertence ao conjunto A. Mostramos assim que $A=\{7,8,9,\ldots\}$ e seu menor elemento é o número 7 .

10. **Determine o número de elementos do conjunto formado pelos triângulos cujas medidas dos lados são números inteiros e cujo perímetro vale 12 .**

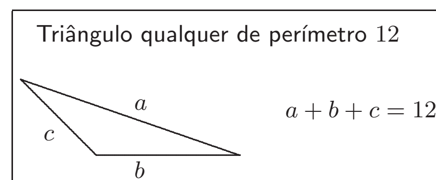
[9] Os múltiplos de 3 são os números da forma $3n$ onde $n\in\mathbb{Z}$ ou seja, são os números:

$$\ldots\ ,\ \mathbf{-4}\times 3\ ,\ \mathbf{-3}\times 3\ ,\ \mathbf{-2}\times 3\ ,\ \mathbf{-1}\times 3\ ,\ \mathbf{0}\times 3\ ,\ \mathbf{1}\times 3\ ,\ \mathbf{2}\times 3\ ,\ \mathbf{3}\times 3\ ,\ \mathbf{4}\times 3\ ,\ \ldots$$

Solução Para resolver esse problema precisamos conhecer a seguinte regra: *Num triângulo, a medida de cada lado é maior que a diferença*[10] *e menor que a soma das medidas dos outros dois. E reciprocamente, três números reais positivos são lados de um triângulo quando cada um deles é maior que a diferença e menor que a soma dos outros dois.* Esse resultado será analizado no exercício resolvido 26, página 52 da próxima Lição.

(a) Os trios de números inteiros a seguir somam 12, mas *não* são lados de um triângulo porque *não* satisfazem a regra acima enunciada:

$1\ ,\ 1\ ,\ 10$	pois	10	não é menor que	$1+1$
$1\ ,\ 2\ ,\ 9$	pois	9	não é menor que	$1+2$
$1\ ,\ 3\ ,\ 8$	pois	8	não é menor que	$1+3$
$1\ ,\ 4\ ,\ 7$	pois	7	não é menor que	$1+4$
$1\ ,\ 5\ ,\ 6$	pois	6	não é menor que	$1+5$
$2\ ,\ 2\ ,\ 8$	pois	8	não é menor que	$2+2$
$2\ ,\ 3\ ,\ 7$	pois	7	não é menor que	$2+3$
$2\ ,\ 4\ ,\ 6$	pois	6	não é menor que	$2+4$
$3\ ,\ 3\ ,\ 6$	pois	6	não é menor que	$3+3$.



Os trios restantes de inteiros positivos que somam 12 são listados abaixo e todos eles satisfazem a regra acima:

$2\ ,\ 5\ ,\ 5$ satisfaz $5-5<2<5+5$; $5-2<5<5+5$

$2\ ,\ 4\ ,\ 4$ satisfaz $4-4<2<4+4$; $4-2<4<2+4$

$3\ ,\ 4\ ,\ 5$ satisfaz $5-4<3<4+5$; $5-3<4<3+5$; $4-3<5<3+4$.

Logo os únicos triângulos de lados inteiros e perímetro 12 são: o de lados $2\ ,\ 5\ ,\ 5$, o de lados $2\ ,\ 4\ ,\ 4$ e o de lados $3\ ,\ 4\ ,\ 5$. Portanto, o conjunto A tem exatamente três elementos.

11. Como demonstrar que o conjunto dos números pares é um conjunto infinito ?

Solução Nós definimos o que é um conjunto finito. Dissemos também que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim, mostrar que um conjunto é infinito, é o mesmo que mostrar que ele não pode ser finito. Como fazer isso ?

Bem, o conjunto dos números pares não é vazio. Logo, podemos iniciar a contagem dos seus elementos. Resta agora mostrar que essa contagem não pára. E para isso, basta mostrar, por exemplo, que para cada natural n podemos exibir n elementos distintos do conjunto dos números pares, o que é fácil de ser realizado. Para tal, dado $n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto $\{2\times\mathbf{1}\ ,\ 2\times\mathbf{2}\ ,\ldots,\ 2\times\boldsymbol{n}\}$. Trata-se de um subconjunto do conjunto dos números pares, com exatamente n elementos.

Esses mesmos argumentos servem para mostrar, por exemplo, que o conjunto dos múltiplos inteiros de um número real não nulo é um conjunto com uma infinidade de elementos[11].

12. Sejam A um conjunto finito e B um subconjunto de A. Pergunta-se: B é finito ?

[10]Aqui, dados dois lados de um triângulo, a diferença de suas medidas se refere à diferença (*medida do lado maior*) - (*medida do lado menor*) que é maior ou igual a zero.

[11]Aproveite a oportunidade para mostrar o seguinte fato. Seja T um triângulo qualquer. Então, o conjunto dos triângulos semelhantes a T é infinito. Antes de demostrar esse fato, faça uma figura que indique com clareza que existe uma infinidade de triângulos, semelhantes ao triângulo dado.

Solução Bem, se podemos contar todos os elementos de A devemos poder contar os elementos de qualquer subconjunto não vazio de A. Ou seja, a resposta dever ser **SIM**. Resta agora, tentar demonstrá-la.

Temos como **hipótese**: A é finito e B é subconjunto de A.
Como **tese**, temos: B é finito.

Comecemos a demonstração:

Para o conjunto B temos duas alternativas distintas: ou B é finito, ou B é infinito.

Vamos mostrar que nas hipóteses do exercício o conjunto B não pode ser infinito.

Suponhamos que o conjunto B é infinito. Nesse caso, como feito na solução do exercício anterior, concluímos: para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos listar n elementos distintos do conjunto B. Sendo B um subconjunto de A concluímos: para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos listar n elementos distintos do conjunto A. Mas isso significa que o conjunto A é um conjunto infinito, contradizendo a hipótese assumida sobre A. Consequentemente, B não pode ser um conjunto infinito. Isso prova que B é finito.

Acabamos de fazer uma *demonstração por redução ao absurdo*. Demonstramos que todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Note que esse resultado tem como conseqüência (imediata): se um conjunto A possui um subconjunto infinito então A também é infinito. Prove isso!

13. Qual dos conjuntos a seguir é finito e qual é infinito ?

(a) $A = \{x \in \mathbb{N}\,;\ x^3 < 630\}$ **(b)** $B = \{x \in \mathbb{Z}\,;\ x^3 < 2\}$.

Solução Para resolver essa questão damos os seguintes argumentos.

(a) Como $512 = 8^3 < 630 < 9^3 = 729$ segue que $A = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,8\}$. Portanto, A é um conjunto finito.

(b) Observe que todos os inteiros negativos são elementos de B pois o cubo de um número negativo é também negativo e logo, menor do que 2. Portanto, $B = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$ e, consequentemente, B é um conjunto infinito.

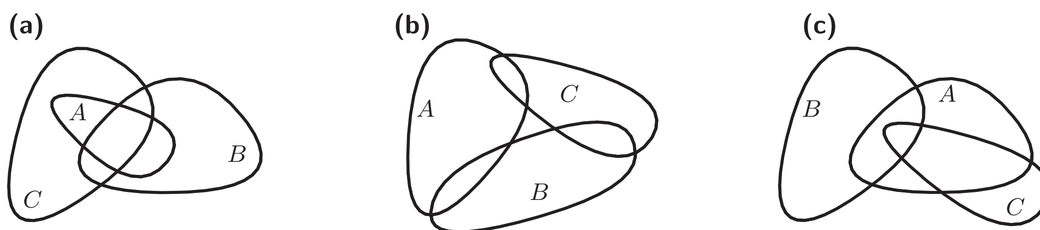
14. Sejam A , B e C regiões do plano. Em cada item construa diagramas de Venn onde A , B e C satisfazem, simultaneamente, as condições do item.

(a) $A - B \subset C$; $A \neq B$; $A \not\subset C$ e $A \cap B \neq \emptyset$;

(b) $A \cap B \neq \emptyset$; $A \cap B \cap C = \emptyset$; $C \cap A \neq \emptyset$ e $C \cap B \neq \emptyset$;

(c) $A \cap B \cap C \neq \emptyset$; $C - A \neq \emptyset$; $A \not\subset B$; $B \not\subset A$ e $B - A \subset B - C$.

Solução Para isso exibimos os seguintes diagramas:



15. **Sejam** $A = \{\sqrt{2}\,,\ \pi\,,\ 0\,,\ 2\,,\ -3\}$ **e** $B = \{-3\,,\ 0\,,\ \sqrt{2}\,,\ 3\,,\ 5\}$.
Pergunta-se:
(a) $A \subset B$ **?** **(b)** $\{2\} \in A$ **?** **(c)** $\{0\} \subset A$ **?** **(d)** $2 \in A$ **?**
Calcule:
(e) $A \cup B$ **(f)** $A \cap B$ **(g)** $A - B$ **(h)** $\complement_B A$.

Solução Analizemos cada uma essas questões.

(a) A resposta é NÃO pois $\pi \in A$ mas $\pi \notin B$.

(b) A resposta é NÃO pois $\{2\}$ não é elemento de A.

(c) Aqui a resposta é SIM pois, todo elemento do conjunto $\{0\}$ também é elemento do conjunto A já que $0 \in A$.

(d) A resposta é SIM pois 2 é um dos elementos do conjunto A.

(e) $A \cup B = \{\sqrt{2}\,,\ \pi\,,\ 0\,,\ 2\,,\ -3\,,\ 3\,,\ 5\}$.

(f) $A \cap B = \{\sqrt{2}\,,\ 0\,,\ -3\}$.

(g) $A - B = \{\pi\,,\ 2\}$.

(h) Nesse caso, A não é um subconjunto de B. Assim sendo, $\complement_B A$ não está bem definido.

16. **Determine quais das afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas.**

(a) $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ n > 300\} \subset \{n \in \mathbb{N}\ ;\ n > 200\}$;
(b) $\{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n^2 > 20\} \subset \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n^2 > 45\}$;
(c) $\{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n^3 < -10\} \subset \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n^3 < 1\}$;
(d) $\{(-1)^{2n}\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \{(-1)^n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Solução Passemos à análise das afirmações.

(a) Se $k \in \{n \in \mathbb{N}\ ;\ n > 300\}$ então $k > 300$. Logo, $k > 200$ ou seja, $k \in \{n \in \mathbb{N}\ ;\ n > 200\}$. Finalizando, concluímos que $A \subset B$ e portanto, a afirmação é VERDADEIRA.

(b) Observe que $5 \in \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n^2 > 20\}$ pois $5^2 > 20$. No entanto $5 \notin \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n^2 > 45\}$ porque $5^2 \not> 45$. Logo a afirmação é FALSA.

(c) Se $k \in \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n^3 < -10\}$ então $k^3 < -10$. Logo, $k^3 < 1$ ou seja $k \in \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n^3 < 1\}$. Consequentemente, a afirmação é VERDADEIRA.

(d) Temos que $(-1)^{2n} = \left[(-1)^2\right]^n = 1^n = 1$. Logo, $\{(-1)^{2n}\ ;\ n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$. Por outro lado, temos:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim, $\{(-1)^n\ ;\ n \in \mathbb{N}\} = \{-1\ ,\ 1\}$ e portanto $A \subset B$. Logo a afirmação é VERDADEIRA.

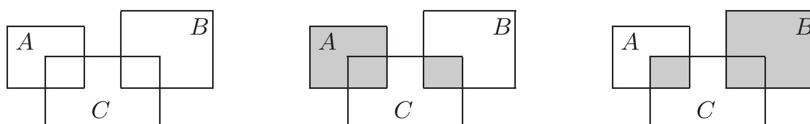
17. **Sejam $A\,,B\,,C$ conjuntos quaisquer. Mostre que a igualdade**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$$

é falsa, construindo diagramas de Venn onde os conjuntos $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap (B \cup C)$ são distintos.

Solução Na figura à esquerda exibimos os conjuntos $A\,,B\,,C$. Na figura do meio, a parte hachurada representa o conjunto $A \cup (B \cap C)$. Na figura que está à direita, a parte hachurada mostra o conjunto $(A \cup B) \cap (B \cup C)$. Essa construção garante que

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap (B \cup C).$$



18. **Sejam A e B conjuntos quaisquer. Mostre que $A - B$ e $A \cap B$ são disjuntos.**

Solução Um elemento que está em $A - B$ deve pertencer a A e não pertencer a B. Logo, ele não pode estar simultaneamente em A e em B, ou seja, em $A \cap B$. Portanto, $A - B$ e $A \cap B$ são disjuntos.

19. **Sejam A e B conjuntos quaisquer. Mostre que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.**

Solução Os elementos de A se dividem em dois grupos *distintos*:

- os elementos de A que *não estão* em B, ou seja, os elementos de $A - B$;
- os elementos de A que *estão* em B, ou seja, os elementos de $A \cap B$.

Consequentemente, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

20. **Dados dois conjuntos quaisquer A e B, nem sempre $A - B = B - A$. Faça diagramas de Venn que ilustre a afirmação $A - B \neq B - A$.**

Solução Considere, por exemplo, o caso em que A e B são conjuntos não vazios e disjuntos.



Nesse caso, $A - B = A$ e $B - A = B$. Consequentemente, no exemplo acima temos que $A - B \neq B - A$.

21. Sejam A e B dois conjuntos finitos. Mostre que $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Solução Primeiramente note que se um dos conjuntos, digamos B, é vazio então a igualdade acima é verdadeira. Nesse caso teremos: $A \cup B = A$ e $A \cap B = \emptyset$. Conseqüentemente,

$$\#(A \cup B) = \#(A) \quad ; \quad \#(B) = 0 \quad \text{e} \quad \#(A \cap B) = 0\,.$$

Poranto, teremos

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)\,.$$

Suponhamos agora que nenhum dos conjuntos é o conjunto vazio. Nesse caso, ao contarmos os elementos de A e em seguida continuarmos a contagem pelos elementos de B estaremos contando duas vêzes os elementos comuns a A e a B ou seja, os elementos de $A \cap B$. Resulta daí então que

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

como queríamos demonstrar.

22. Dados dois conjuntos A e B finitos, $\#(A - B) = \#(A) - \#(B)$?

Solução A resposta a essa pergunta é NÃO. A justificativa vem com o seguinte exemplo.

Sejam $A = \{1\,, \pi\}$ e $B = \{\pi\,, 4\}$. Nesse caso, $A - B = \{1\}$. Assim,

$$\#(A - B) = 1 \quad \text{mas} \quad \#(A) - \#(B) = 2 - 2 = 0.$$

23. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x \leq -3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x > -38\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x > 6\}$. Determine: $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$; $A \cap B \cap C$.

Solução Temos que:

(a) $A \cap B = \{\ldots, -5, -4, -3\} \cap \{-37, -36, -35, \ldots\} = \{-37\,, -36\,, -35\,, \ldots\,, -3\}$.

(b) $A \cap C = \{\ldots, -5, -4, -3\} \cap \{7, 8, 9, \ldots\} = \emptyset$.

(c) $B \cap C = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x > -38 \text{ e } x > 6\} = \{7\,, 8\,, 9\,, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x > 6\}$.

(d) $A \cap B \cap C = \{\ldots, -5, -4, -3\} \cap \{-37, -36, -35, \ldots\} \cap \{7, 8, 9, \ldots\} = \emptyset$.

24. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x \leq -5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x \geq -1\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x > 7\}$. Determine: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$.

Solução Temos que:

(a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \leq -5 \text{ ou } x \geq -1\} = \{\dots, -7, -6, -5, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
(b) $A \cup C = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \leq -5 \text{ ou } x > 7\} = \{\dots, -7, -6, -5, 8, 9, 10, 11, \dots\}$.
(c) $B \cup C = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \geq -1 \text{ ou } x > 7\} = \{-1, -2, -3, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \geq -1\}$.

25. Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos. Quantos elementos tem $A \cup B$?

Solução Se os conjuntos A e B são disjuntos então, $A \cap B = \emptyset$. Logo, $\#(A \cap B) = 0$. Agora, segue da igualdade $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$ que

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B).$$

26. Sejam A e B conjuntos finitos. Sob que condições podemos garantir que

$$\#(A - B) = \#(A) - \#(B)\,?$$

Solução Vimos nos exercícios 18 e 19 que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ onde $A - B$ e $A \cap B$ são disjuntos. Assim, segue do exercício anterior que $\#(A) = \#(A - B) + \#(A \cap B)$. Consequentemente,

$$\#(A - B) = \#(A) - \#(A \cap B).$$

Para obter a fórmula desejada devemos ter $\#(A \cap B) = \#(B)$ mas, essa igualdade ocorre se, e somente se, $B \subset A$. Portanto,

$$\#(A - B) = \#(A) - \#(B) \iff B \subset A.$$

27. Seja A um conjunto com n elementos, onde n é um inteiro positivo. Quantos subconjuntos unitários o conjunto A possui?

Solução Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ os n elementos distintos de A. Os subconjuntos unitários que podemos construir são: $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$. Ou seja, A possui n subconjuntos unitários.

28. Seja A um conjunto com n elementos, onde n é um inteiro positivo. Mostre que o conjunto A possui exatamente 2^n subconjuntos.

Solução Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. Quantos subconjuntos A possui? Não sabemos ainda qual é a resposta. Para encontrá-la vamos usar o seguinte artifício.

Juntemos a A um elemento extra b para formar um novo conjunto $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b\}$ com $n + 1$ elementos distintos.

Quantos subconjuntos o conjunto B possui?
O conjunto B possui *dois tipos diferentes de subconjuntos*:

– aqueles que não possuem b como elemento: esses são exatamente os subconjuntos de A;

– aqueles que possuem b como um dos seus elementos: esses são obtidos juntando-se o elemento b aos subconjuntos de A.

Conclusão: B possui o dobro de subconjuntos que A possui, isto é, *um conjunto com* $n+1$ *elementos possui o dobro de subconjuntos que possui um conjunto com* n *elementos*.

☞ Um conjunto unitário possui dois subconjuntos, a saber: ele mesmo e o conjunto vazio.

Consequentemente, segue da conclusão acima que:

☞ um conjunto com 2 elementos possui o dobro de subconjuntos que possui um conjunto com 1 elemento, ou seja, possui $2 \times 2 = 2^2$ subconjuntos;

☞ um conjunto com 3 elementos possui o dobro de subconjuntos que possui um conjunto com 2 elemento, ou seja, possui $2 \times 2^2 = 2^3$ subconjuntos;

☞ um conjunto com 4 elementos possui o dobro de subconjuntos que possui um conjunto com 3 elemento, ou seja, possui $2 \times 2^3 = 2^4$ subconjuntos;

☞ um conjunto com 5 elementos possui o dobro de subconjuntos que possui um conjunto com 4 elemento, ou seja, possui $2 \times 2^4 = 2^5$ subconjuntos, e assim sucessivamente:

☞ um conjunto com n elementos terá 2^n subconjuntos, onde n é um inteiro positivo (ou nulo).

Guarde a *magia* da solução: juntamos um elemento extra ao conjunto A formando assim um novo conjunto B. Com isso, conseguimos uma relação entre $\#(A)$ e $\#(B)$. A partir dessa relação e descobrindo o que ocorre quando $n = 1$ fomos capazes de descobrir o que de fato acontece quando $n = 2, 3, 4, \ldots$ e assim por diante.

29. Seja A um conjunto com n elementos, onde n é um inteiro maior ou igual a 2. Quantos subconjuntos com apenas dois elementos o conjunto A possui ?

Solução Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto com $n \geq 2$ elementos. Uma maneira de resolver o problema é descrever os subconjuntos de A com 2 elementos de tal forma que seja possível contá-los quantos são. Faremos isso da seguinte forma.

Considere os seguintes subconjuntos de A:

$$\boldsymbol{\{a_1, a_1\}}\ ;\ \{a_1, a_2\}\ ;\ \{a_1, a_3\}\ ;\ \{a_1, a_4\}\ ; \cdots ;\ \{a_1, a_{n-1}\}\ ;\ \{a_1, a_n\} \longleftarrow$$ $n-1$ subconjuntos com 2 elementos;

$$\boldsymbol{\{a_2, a_2\}}\ ;\ \{a_2, a_3\}\ ;\ \{a_2, a_4\}\ ; \cdots ;\ \{a_2, a_{n-1}\}\ ;\ \{a_2, a_n\} \longleftarrow$$ $n-2$ subconjuntos com 2 elementos;

$$\boldsymbol{\{a_3, a_3\}}\ ;\ \{a_3, a_4\}\ ; \cdots ;\ \{a_3, a_{n-1}\}\ ;\ \{a_3, a_n\} \longleftarrow$$ $n-3$ subconjuntos com 2 elementos;

$$\boldsymbol{\{a_4, a_4\}}\ ; \cdots ;\ \{a_4, a_{n-1}\}\ ;\ \{a_4, a_n\} \longleftarrow$$ $n-4$ subconjuntos com 2 elementos;

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\boldsymbol{\{a_{n-1}, a_{n-1}\}}\ ;\ \{a_{n-1}, a_n\} \longleftarrow$$ $n-(n-1) = 1$ subconjuntos com 2 elementos;

$$\boldsymbol{\{a_n, a_n\}} \longleftarrow$$ $n-(n) = 0$ subconjuntos com 2 elementos.

Assim, o número de subconjuntos com 2 elementos é:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) . \tag{1.1}$$

Para calcular essa soma podemos, por exemplo, fazer o seguinte.

A tabela que montamos acima corresponde à *metade superior*[12] mais a diagonal de um tabuleiro de $n \times n$ casas. Visto dessa forma, podemos calcular a soma (1.1) com facilidade. Ela corresponde ao número de casas situadas na metade superior do tabuleiro, que vale:

$$\frac{\text{número total de casas} - \text{número de casas na diagonal}}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Portanto, um conjunto com $n \geq 2$ elementos possui

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad \text{subconjuntos com 2 elementos}\,.$$

30. **Escreva as afirmações a seguir usando quantificadores.**
(a) Existem números pares maiores do que 100^{100} ;
(b) O produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro ;
(c) Do produto de dois inteiros pode resultar um número não par ;
(d) Da soma de dois inteiros pode resultar um número negativo ;
(e) O quociente de dois inteiros não nulos pode não ser um número inteiro.

Solução

(a) Existem números pares maiores do que 100^{100}: $\exists\, a \in \mathcal{P}\ ;\ a > 100^{100}$

(b) O produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro: $ab \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall\, a\,,\, b \in \mathbb{Z}$

(c) Do produto de dois inteiros pode resultar um número não par: $\exists\, a\,, b \in \mathbb{Z}\ ;\ ab \notin \mathcal{P}$

(d) Da soma de dois inteiros pode resultar um número negativo: $\exists\, a\,, b \in \mathbb{Z}\ ;\ a + b < 0$

(e) O quociente de dois inteiros não nulos pode não ser um número inteiro: $\exists\, a\,, b \in \mathbb{Z}\ ;\ a\,, b \neq 0$ e $a/b \notin \mathbb{Z}$

31. **Sejam $A\,, B\,, C$ conjuntos quaisquer. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.**

(a) $x \in A \cup B \implies x \in A$ **(b)** $x \in A \cup B \implies x \in A \cup C$
(c) $x \in A - C \implies x \notin B \cap C$ **(d)** $x \in A \cap B \implies x \notin A - B.$

Solução Vamos à análise de cada uma das afirmações.

(a) Se $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$. Logo, não podemos concluir que x pertence necessariamente ao conjunto A. Por exemplo, quando $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $x = 2$ temos que: $x \in A \cup B$ mas $x \notin A$. Esse exemplo mostra que a afirmação é FALSA.

[12] A *metade superior* de um tabuleiro de $n \times n$ casas é constituído pelas casa do tabuleiro que estão acima da diagonal principal.

(b) Se $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$. Portanto, não podemos concluir que x pertence necessariamente a $A \cup C$. Por exemplo, quando $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \emptyset$ e $x = 2$ temos que: $x \in A \cup B$ mas $x \notin A \cup C$. Esse exemplo mostra que a afirmação é FALSA.

(c) De $x \in A - C$ segue que $x \in A$ e $x \notin C$. Como $x \notin C$ concluímos que $x \notin C \cap B$. Isso mostra que a afirmação do item (c) é VERDADEIRA.

(d) Seja $x \in A \cap B$. Ao retirar de A os elementos de B, certamente retiramos de A os elementos comuns a A e a B ou seja, $A \cap B$. Em particular, retiramos o elemento x. Consequentemente, $x \notin A - B$. Isso mostra que a afirmação do item (d) é VERDADEIRA.

32. **Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras?**

(a)	$x^2 > 0$	$\Longrightarrow$	$x > 0$	**(b)**	$x^3 > 0$	$\Longrightarrow$	$x > 0$
(c)	$x^2 = y^2$	$\Longrightarrow$	$x = y$	**(d)**	$x \geq 2$	$\Longrightarrow$	$x > 2$
(e)	$y > 3$	$\Longrightarrow$	$y^2 \geq 8$	**(f)**	$x + y = 0$	$\Longrightarrow$	$x^2 + y^2 = 0$
(g)	$x < 5$	$\Longrightarrow$	$x \leq 4$	**(h)**	$x < 2$ e $y < 3$	$\Longrightarrow$	$xy < 6$.

Solução Analizemos cada uma das questões colocadas.

(a) FALSA pois, se $x = -1$ temos: $x^2 = (-1)^2 > 0$ mas, $x = -1$ não é positivo.

(b) VERDADEIRA pois o número x não pode ser nulo (nesse caso $x^3 = 0$) nem pode ser negativo (nesse caso $x^3 < 0$ pela regra de sinais).

(c) FALSA pois para $x = -1$ e $y = 1$ temos: $x^2 = (-1)^2 = 1^2 = y^2$, e no entanto, $x = -1 \neq 1 = y$.

(d) FALSA pois x pode ser exatamente igual a 2.

(e) Como $y > 3$ temos que $y^2 > 9$. Mas, se $y^2 > 9$ então $y^2 \geq 8$. Portanto a afirmação é VERDADEIRA.

(f) FALSA pois para $x = 1$ e $y = -1$ temos: $x + y = 0$ mas, $x^2 + y^2 = 2 \neq 0$.

(g) FALSA pois, sendo x um número real podemos ter $x = 4{,}9 < 5$.

(h) FALSA. Para ver isso, tomamos $x = -2 < 2$ e $y = -3 < 3$. Nesse caso, $xy = 6$.

Exercícios

1. Liste os elementos de cada um dos conjuntos:
   (a) Conjunto dos múltiplos positivos de 5 que são menores do que 37 ;
   (b) Conjunto dos 10 primeiros inteiros positivos que divididos por 4 deixam resto 3 ;
   (c) Conjunto dos inteiros positivos que são divisores comuns de 60 e 100 ;
   (d) Conjunto dos números inteiros positivos que são menores do que 50 e que são divisíveis por 7.

2. Diga se os conjuntos a seguir são iguais ou se são distintos. Redija uma justificativa para sua resposta.
   (a) $\{1, 2, 4, 7, 5, 9, 10\}$;
   $\{2, 9, 5, 2, 10, 7, 9, 1, 4, 7\}$.
   (b) Conjunto dos triângulos retângulos ;
   Conjunto dos triângulos eqüiláteros.
   (c) Conjunto dos números ímpares que são maiores ou iguais a 3 ;
   Conjunto dos números ímpares que são maiores do que 2.
   (d) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, x - 1 = 0\}$;
   $\{x \in \mathbb{R} \,;\, 3(x-1)^2 = 0\}$.
   (e) Conjunto dos números primos positivos que são divisores de 210 ;
   Conjunto dos números primos positivos que são divisores de 420.
   (f) Conjunto dos múltiplos positivos de 6 ;
   Conjunto dos múltiplos positivos de 2.

3. Um conjunto A é formado pelos dígitos da unidade dos números:

   1232^{23} ; 1207^{28} ; 267^{47} ; 139^{1203}.

   Liste os elementos do conjunto A.

4. Quais dos conjuntos a seguir são unitários e quais deles são o conjunto vazio ?
   (a) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, x^2 + 1 = 0\}$;
   (b) $\{y \in \mathcal{P} \,;\, y^3 = 8\}$;
   (c) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, x^2 = 0\}$;
   (d) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, x > 0\}$;
   (e) $\{x \in \mathcal{P} \,;\, x = x^2\}$;
   (f) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, x = x^2\}$;
   (g) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, x + 1 = 2 \;\; e \;\; x - 1 = 3\}$;
   (h) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, x > 0 \;\; e \;\; x < -1\}$;
   (i) $\{x \in \mathcal{P} \,;\, x > 2 \;\; e \;\; x < 3\}$;
   (j) $\{z \in \mathbb{Z} \,;\, z + 1 = z\}$;
   (k) $\{z \in \mathbb{Z} \,;\, z^2 = 1\}$.

5. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras ? Redija uma justificativa para suas respostas.
   (a) Todos os conjuntos unitários são iguais ;
   (b) $\{2, 2, 2\}$ é um conjunto unitário ;
   (c) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, x^2 < 0\} = \emptyset$;
   (d) $x \in \{x\}$;
   (e) $\{2, -2, 2\}$ possui 3 elementos ;
   (f) $\{x \in \mathbb{R} \,;\, x^2 = 1\}$ é um conjunto unitário ;
   (g) $\{x \in \mathbb{Z} \,;\, (x-3)^2 = 0\} = \{3, -3\}$;
   (h) $\{x \in \mathbb{R} \,;\, (x-3)^3 = 0\}$ é um conjunto unitário.

6. Um conjunto é formado pelo menor inteiro positivo que é múltiplo comum dos números 22 e 55 . Qual é esse conjunto ?

7. Um conjunto unitário é formado pelo menor inteiro positivo N para o qual os números

   $\frac{N}{2}, \frac{N}{3}, \frac{N}{4}, \frac{N}{5}, \frac{N}{6}, \frac{N}{7}, \frac{N}{8}, \frac{N}{9}$ são inteiros.

   Qual é esse conjunto ?

8. Seja A o conjunto formado por todos os inteiros n que têm a seguinte propriedade: o resto da divisão de $4n + 7$ por 5 deixa resto 2 . Pergunta-se:
   (a) $0 \in A$? (b) $37 \in A$?
   (c) $12 \in A$? (d) $100^{10} \in A$?
   (e) $-5 \in A$? (f) $-7 \in A$?

9. Os conjuntos a seguir são finitos ?

(a) Conjunto dos números pares com dois algarísmos ;

(b) $\{y \in \mathbb{Z}\ ;\ (y-1)(y-2) = 0\}$;

(c) Conjunto das frações de números inteiros positivos que são maiores do que $2/3$ e cujo numerador vale 132 ;

(d) Conjunto dos números ímpares que são múltiplos de 6 ;

(e) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x > -10$ e $x < 25\}$;

(f) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x > -10$ ou $x < 25\}$;

(g) Conjunto dos números inteiros positivos com menos do que 5 algarismos ;

(h) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x > 11\}$;

(i) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x > 0$ e $x < -35\}$;

(j) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x > 6$ e $x < 58\}$;

(k) Conjunto dos divisores positivos de 1420 ;

(l) Conjunto de todos os divisores de 1420 ;

(m) Conjunto dos múltiplos positivos de 3 ;

(n) Conjunto dos múltiplos positivos de 3 menores do que 2001 ;

(o) Conjunto dos triângulos retângulos cuja área vale 20 ;

(p) Conjunto dos triângulos cujos lados são números inteiros e cujo perímetro vale 20 .

10. Determine o número de elementos de cada um dos conjuntos a seguir.

(a) $\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 1567\}$;

(b) $\{-53, -2, -1, \ldots, 8901\}$;

(c) $\{2, 4, 6, 8, \ldots, 24778\}$;

(d) $\{-1237, -1235, \ldots, -5, -3, -1\}$.

11. Seja $A_n = \{-3, -2, -1, \ldots, n-1\}$ onde $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq -2$.

(a) Descreva os conjuntos A_{-3} , A_0 , A_2 e A_5 listando todos os seus elementos ;

(b) Determine o número de elementos de A_{-2} , A_0 , A_2 e A_5 ;

(c) Determine o número de elementos de A_n.

Complete a tabela:

$n \in \mathbb{Z}$	A_n	$n-1$	Elementos de A_n	$\#(A_n)$
-2	A_{-2}			
0	A_0			
2	A_2			
5	A_5			

12. Sejam
$A_n = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n+3\}$;
$B_n = \{-n, -n+1, \ldots, n+1, n+2\}$;
$C_n = \{10, 10+2, \ldots, 10+2n\}$;

onde $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$.

Descreva cada um dos conjuntos:
A_0 , B_1 , C_2 , A_3 , B_4 , C_5 , A_6 , B_7 , C_8 listando todos os seus elementos.

13. Determine o número de elementos dos conjuntos A_n , B_n e C_n do exercício anterior. Esse número, claro, depende do inteiro $n \geq 0$.

14. Dê os 10 primeiros elementos de cada uma das listas (ou sequências) a seguir.

(a) $1, 3, 5^3, 7^5, \ldots$

(b) $1, 12^5, 11^{10}, 10^{15}, 9^{20}, \ldots$

15. Nas listas a seguir, diga qual é o elemento solicitado.

(a) Qual é o centésimo elemento na lista
$1, 2^3, 3^5, 4^7, 5^9, 6^{11}, \ldots$?

(b) Qual é o milésimo elemento na lista
$1, 3, 5^2, 7^4, 9^6, 11^8, \ldots$?

(c) Qual é o centésimo quinto elemento da lista
$1, 2^3, 4^5, 6^7, 8^9, 10^{11}, \ldots$?

(d) Qual é o milésimo segundo elemento da lista
$\frac{1}{3}, \frac{2}{5^3}, \frac{4}{7^5}, \frac{6}{9^7}, \frac{8}{11^9}, \ldots$?

16. Sabendo que a lista $1, 2, 4^2, 6^5, 8^8, 10^{11}, \ldots, k$ possui 273 elementos, determine k e o penúltimo elemento da lista.

17. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras ? Justifique as que são falsas!!

(a) A interseção de dois conjuntos finitos é um conjunto finito;

(b) A interseção de dois conjuntos infinitos é um conjunto infinito;

(c) Se A é finito e B é infinito então $A \cup B$ é infinito;

(d) Se A é finito e B é infinito então $A - B$ é infinito;

(e) Se A é finito e B é infinito então $B - A$ é infinito;

(f) Se A e B são conjuntos com uma infinidade de elementos então $A - B$ tem uma infinidade de elementos;

(g) Se B é infinito e $A \supset B$ então A também é infinito.

18. Quantos triângulos isósceles têm lados inteiros e perímetro igual a 20?

19. Quais dos conjuntos a seguir são finitos?

(a) Conjunto de todos os triângulos retângulos cujas medidas dos lados são inteiros positivos;

(b) Conjunto de todos os triângulos isósceles cujas medidas dos lados são inteiros positivos e cujo perímetro vale 20;

(c) Conjunto de todos os triângulos isósceles cujo perímetro vale 20;

(d) Conjunto de todos os triângulos eqüiláteros cujas medidas dos lados são inteiros positivos e cujo perímetro vale 20;

(e) Conjunto de todos os triângulos eqüiláteros cujo perímetro vale 20.

20. Sejam A e B conjuntos finitos.

(a) Use o exercício 12 da página 20 para mostrar que $A \cap B$ é finito.

(b) Mostre que $A \cup B$ é finito. Para isso se inspire na solução do exercício 12 da página 20.

21. Sejam A e B conjuntos quaisquer.

(a) Mostre que se A é infinito então $A \cup B$ é infinito.

(b) O que se pode dizer de $A \cap B$ quando A é infinito?

22. Quantos elementos tem o conjunto $\{m + n \; ; \; m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq m, n \leq 100\}$?

23. Quais dos conjuntos a seguir são finitos? Determine o número de elementos daqueles que são finitos.

(a) Conjunto dos múltiplos positivos de 3 que são menores do que 2.317;

(b) Conjunto dos triângulos retângulos cujas medidas dos lados são números inteiros e cujo perímetro vale 24;

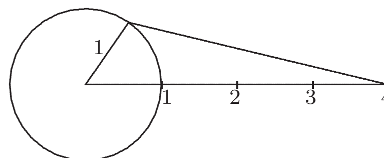
(c) $\{n \in \mathbb{Z}^+ \; ; \; 102 < 2n + 1 \leq 2.307\}$;

(d) Conjunto dos triângulos cuja base mede 2 e cuja altura relativa a essa base, mede 1;

(e) Conjunto dos triângulos retângulos cujas medidas dos lados são inteiros positivos.

24. Quantos elementos tem o conjunto $\{n \in \mathbb{Z} \; ; \; 102 < 2n + 1 \leq 2.317\}$?

25. Se um triângulo tem dois de seus lados medindo respectivamente 1 e 4 quais são as possíveis medidas para terceiro lado? Se você exigir que a medida do terceiro lado também deve ser inteira, qual será a resposta? Relacione a figura a seguir com sua resposta.



26. Generalize esse problema, isto é, formule[13] um problema do qual o problema anterior é um caso particular. Resolva-o!

27. Construa diagramas de Venn que represente cada uma das situações a seguir:

(a) A é subconjunto próprio de B;

(b) $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ mas A e B têm elementos em comum;

(c) $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subset C$ e $A \cap B \cap C \neq \emptyset$;

(d) $(B - A) \cap C \neq \emptyset$ e $A \cap B \cap C \neq \emptyset$;

(e) A não contém B, B está contido em C e C contém A.

[13] **Formular** *v.t.* Por em fórmula; Expor com precisão (vide Aurélio).

28. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Diga quais das afirmações a seguir são verdadeiras.

(a) $2 \in A$ (b) $\{2\} \subset A$

(c) $\{1\} \in \mathfrak{P}(A)$ (d) $A \in \mathfrak{P}(A)$

(e) $\{4\} \subset \mathfrak{P}(A)$ (f) $\{1, 4\} \in \mathfrak{P}(A)$

(g) $\emptyset \in \mathfrak{P}(A)$ (h) $\emptyset \subset \mathfrak{P}(A)$.

29. Sejam A, B e C conjuntos não vazios. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Faça diagramas de Venn para justificar aquelas que são falsas.

(a) Se $A \subset B$ e $B = C$ então $A \subset C$;

(b) Se $A \subset B$ e $B \neq C$ então $A \not\subset C$;

(c) Se $A \subset B$ e $B \not\subset C$ então $A \not\subset C$;

(d) $A \cup B \supset B$;

(e) $A \subset A \cup B$;

(f) Se $A \not\subset B \cup C$ então $A - B \not\subset C$.

30. Determine todos os possíveis conjuntos X que satisfazem a igualdade $A \cup X = B$, onde A e B são dados a seguir.

(a) $A = \{1, 3, 5\}$ e
$B = \{-1, 1, -2, 3, 5, 0\}$.

(b) $A = \{0, 1, 3, -5, 2\}$ e
$B = \{2, 0, 1, 3, -1, -5, \}$.

31. Considere os conjuntos
$A = \{1, 2, -2, 3, 4\}$ e
$B = \{1, 2, -2, 3, 4, 7, 0, -1\}$.

Determine o conjunto C que satisfaz a igualdade $A \cup C = B$ e que tem a seguinte propriedade: *todo conjunto X que satisfaz $A \cup X = B$ está contido em C.*

32. Considere os conjuntos
$A = \{1, 2, 3, -1, -2, 7, 11\}$ e
$B = \{1, -2, 3, 10\}$.

Determine 5 conjuntos satisfazendo a igualdade $A \cap X = B$. Agora, determine o conjunto C que satisfaz $A \cap C = B$ e que tem a seguinte propriedade: *todo conjunto X que satisfaz a igualdade $A \cap X = B$ contém o conjunto C.*

33. Seja $A = \{1, 3, 5, 0\}$. Quantos conjuntos X satisfazem, simultaneamente, as duas igualdades:

$$\begin{cases} A \cup X = \{-1, 1, -2, 3, 5, 4, 0\} \\ A \cap X = \{1, 5\} \end{cases}$$

ou seja, quantas soluções o sistema de equações acima admite?

34. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O que podemos concluir sobre A e B sabendo que $A - B = B - A$? Tente achar a resposta usando diagramas de Venn.

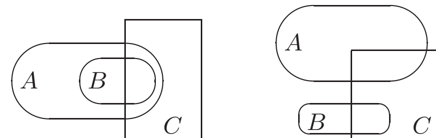
35. Nas figuras a seguir hachure a região que representa cada um dos itens:

(a) $A \cap B$ (b) $A \cap C$

(c) $A \cap (C \cap B)$ (d) $A \cup (B \cap C)$

(e) $(A \cup B)(A \cup C)$ (f) $B \cap (A \cup C)$

(g) $(B \cap A) \cup (B \cap C)$ (h) $(A \cap C) \cup B$.



36. Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Mostre que a igualdade

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cup (B - C)$$

é falsa. Faça isso usando diagramas de Venn.

37. Seja A um conjunto com n elementos onde $n \geq 2$ é um número inteiro.

(a) Quantos subconjuntos de A possuem n elementos?

(b) Quantos subconjuntos de A possuem $n - 1$ elementos?

(c) Quantos subconjuntos de A possuem $n - 2$ elementos?

38. Sejam A, B conjuntos quaisquer. Mostre que:

(a) A e $B - A$ são disjuntos;

(b) $B - A$ e $B \cap A$ são disjuntos;

(c) $A \cup B = A \cup (B - A)$;

(d) $B = (B - A) \cup (B \cap A)$.

39. Sejam A, B conjuntos finitos. Use o exercício anterior para mostrar que:
(a) $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B - A)$;
(b) $\#(B) = \#(B - A) + \#(B \cap A)$;
(c) $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

40. Seja A um conjunto com n elementos, onde n é um inteiro maior ou igual a 2 . Mostramos no exercício 29 que A tem $\frac{n(n-1)}{2}$ subconjuntos com dois elementos. Por outro lado, o número de subconjuntos de A com dois elementos é, certamente, um número inteiro. Pergunta-se: $\frac{n(n-1)}{2}$ é de fato um número inteiro ou os cálculos no exercício 29 estão incorretos ?

41. Ainda com relação ao exercício anterior propõe-se: refaça o exercício 29 usando a *magia* da solução do exercício 28. Isto é, busque uma relação entre o número de subconjuntos de A com 2 elementos e o número de subconjuntos de B com 2.

42. Agora, seja A um conjunto com n elementos, onde n é um inteiro maior ou igual a 3 . Use novamente a *magia* da solução do exercício 28 para *tentar* descobrir quantos subconjuntos com apenas 3 elementos o conjunto A possui.

43. Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.
(a) Se $x \in A$ então $x \in A - B$;
(b) Se $x \notin A$ então $x \in B - A$;
(c) $x \in A \cap B \implies x \notin A - B$;
(d) Suponha que $A - B \neq \emptyset$.
Podemos então concluir que $A \cap B \neq \emptyset$;
(e) Admita que $A \cap B = \emptyset$.
Nesse caso:
se $C \subset A$ e $C \subset B$ então $C = \emptyset$.
(f) Suponha que $A \subset B$.
Nesse caso:
$x \notin B \implies x \in A$;
(g) Admita que $A \cup B \subset C$. Segue daí que:
$x \in A - B \implies x \in C$.

44. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras ?

(1) $x > 0 \implies x^2 > 0$;
(2) $x < 0 \iff x^3 < 0$;
(3) $x^5 > 0 \iff x > 0$;
(4) $x^6 = 0 \iff x = 0$;
(5) $x > 2 \implies x \geq 3$;
(6) $x + y > 0 \implies x > 0$ e $y > 0$;
(7) $x - y > 0 \implies x > 0$;
(8) $xy > 0 \implies x > 0$ e $y > 0$;
(9) $xy^2 > 0 \implies x > 0$;
(10) $x^2y < 0 \implies y < 0$;
(11) $x^2y > 0 \implies x, y > 0$;
(12) $x^3y^5 < 0 \implies x > 0$ e $y < 0$;
(13) $x^2y \leq 0 \implies y < 0$;
(14) $xy \geq 0 \implies x, y \geq 0$ ou $x, y \leq 0$;
(15) $x^{218} \geq 0 \implies x \geq 0$;
(16) $x \in \{3\} \implies x \in \{3, \pi\}$;
(17) $x = 3 \implies x = 3$ ou $x = \pi$.

45. Diga quais das afirmações a seguir são falsas. Justifique sua resposta.
(1) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a, b \leq 0$.
Segue daí que $a^3 b > 0$.
(2) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq 0$ e $b > 0$.
Segue daí que $a^4 b \geq 0$.
(3) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq 0$ e $b > 0$.
Segue daí que $(a^4 + 0{,}1)b > 0$.
(4) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq 0$ e $b > 0$.
Segue daí que $(a + 0{,}1)^4 b > 0$.

46. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Redija justificativas para suas respostas.

(1) $a^2 > 0 \implies a > 0$;
(2) $a^3 > 0 \implies a > 0$;
(3) $a^5 < 0 \implies a < 0$;
(4) $a > 2 \implies a \geq 2$;
(5) $a^{111} \geq 0 \implies a \geq 0$;
(6) $a^2 = b^2 \implies a = b$;
(7) $a^3 = b^3 \implies a = b$;

(8) $a^4 = 16b^4 \implies a = 2b$ ou $a = -2b$;

(9) $a^2 + b^2 = 0 \implies a = 0 = b$;

(10) $a^{218} \geq 0 \implies a \geq 0$;

(11) $a + b \geq 0 \implies a > 0$ ou $b > 0$.

47. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Redija justificativas para suas respostas.

(1) $a > 0 \iff a^2 > 0$;

(2) $a < 0 \iff a^3 < 0$;

(3) $a^5 > 0 \iff a > 0$;

(4) $a^6 = 0 \iff a = 0$;

(5) $a \geq 2 \implies a > 2$;

(6) $a^2 - b^2 = 0 \iff a^2 = b^2$;

(7) $a^2 = b^2 \iff a^4 = b^4$;

(8) $a^2 > b^2 \implies a > b$;

(9) $a^3 > b^3 \implies a > b$;

(10) $a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 = b$;

(11) $a^3 + b^3 = 0 \iff a = 0 = b$;

(12) $a^2 = b^2 \implies a^3 = b^3$;

(13) $a^3 = b^3 \implies a^2 = b^2$;

(14) $a^2 = b^2 \implies (a+1)^2 = (b+1)^2$;

(15) $a^4 + b^4 = 0 \iff a = 0 = b$;

(16) $a^3 + b^4 = 0 \implies a < 0$;

(17) $a^3 + b^4 = 0 \implies a \leq 0$;

(18) $a^3 + b^4 = 0 \iff a \leq 0$;

(19) $a^2 + b^4 = 0 \iff a = 0 = b$.

48. Sejam
$A =$ Conjunto dos triângulos retângulos ;
$B =$ Conjunto dos triângulos isósceles ;
$C =$ Conjunto dos triângulos eqüiláteros .
Escreva as afirmações a seguir como fizemos nos exemplos das seções 9 e 11.

(a) Nem todo triângulo retângulo é isósceles ;

(b) Todo triângulo eqüilátero é isósceles ;

(c) Nenhum triângulo retângulo é eqüilátero ;

(d) Existem triângulos retângulos que são isósceles ;

(e) Não existem triângulos retângulos que sejam eqüiláteros .

49. Escreva as afirmações a seguir como fizemos nos exemplos das seções 9 e 11.

(a) O produto de dois números inteiros é um número inteiro ;

(b) Existem números inteiros menores do que -101^{101} ;

(c) O quociente de dois inteiros não nulos é um número racional ;

(d) A diferença de dois inteiros positivos pode ser um inteiro negativo ;

(e) A soma de dois números racionais pode ser um número inteiro .

50. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e considere o conjunto

$$B = \{-a \in \mathbb{R} \; ; \; a \in A\}.$$

Mostre que:

(a) A finito $\Rightarrow$ B finito.
Você pode demonstrar isso usando os argumentos da solução do exercício 12 da página 20.

(b) Use o item acima para provar que:
B finito $\Rightarrow$ A finito.

(c) Conclua que:
A é finito $\Leftrightarrow$ B é finito.

(d) Use o item anterior para provar que:
A é infinito $\Leftrightarrow$ B é infinito.

51. Sabendo que $\#(A) = n$ e $\#(B) = m$ pergunta-se: quantos elementos possui o conjunto $A \times B$?

52. Represente graficamente o conjunto $A \times B$ onde $A = \{1, 2, 3, 4\} = B$.

53. O conjunto $\{(a, a) \; ; \; a \in A\}$ é dito *diagonal* do conjunto A. Represente-o graficamente.

54. Sejam A, B conjuntos finitos. Mostre que

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$$

se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

55. Enuncie e demonstre um resultado semelhante para três conjuntos.

2

Apresentação dos números reais

Vamos relembrar algumas notações e fatos elementares sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e sua representação na reta. Por enquanto, faremos isso de forma superficial. Voltaremos a esse tópico e o faremos de forma um pouco mais precisa, representando racionais e irracionais na reta.

1 Subconjuntos especiais

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

1. Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Outros subconjuntos:

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ $\quad$ $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$

O conjunto $\mathbb{Z}^+$ dos inteiros positivos é dito *conjunto dos números naturais*. Ele também é denotado por $\mathbb{N}$.

2. Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; ; \; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$.

Exemplos: $\frac{1}{2}$; $1{,}5 = \frac{15}{10}$; $-\frac{3{,}1}{0{,}23} = -\frac{31}{10} \div \frac{23}{100} = -\frac{310}{23}$; $7 = \frac{7}{1}$.

Note que todo $p \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito na forma $p = \frac{p}{1}$. Portanto, todo número inteiro é um número racional.

Veremos mais tarde que: $\dfrac{-p}{q} = \dfrac{p}{-q} = -\dfrac{p}{q}$ para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Uma expressão da forma $\dfrac{p}{q}$ com p, q inteiros e $q \neq 0$ também é dita *fração de números inteiros* ou, simplesmente, *fração*.

Note que todo número racional não nulo pode ser escrito na forma $\pm\dfrac{p}{q}$ onde p, q são inteiros positivos. Além disso, cancelando os fatores primos comuns na decomposição de p e q em fatores primos, obtemos o que chamamos de uma *fração irredutível*. O *Teorema da Decomposição em Fatores Primos* nos garante que toda fração não nula tem a sua forma irredutível, aliás, única: basta cancelar os fatores primos comuns ao numerador e ao denominador da fração!

Nos exemplos a seguir, as frações à direita das igualdades estão na forma irredutível:

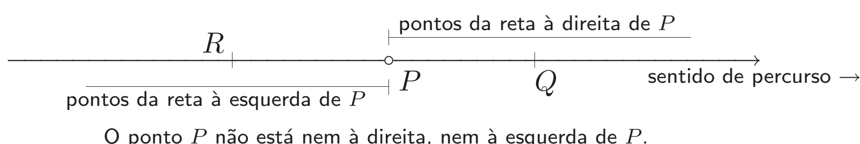
$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad ; \quad -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \quad ; \quad \frac{126}{60} = \frac{21}{10}.$$

3. ***Irracionais*** : Os números reais que *não são racionais* são ditos *números irracionais*.
   Exemplos: $\sqrt{5}$; $-\sqrt{3}$; π ; $-\sqrt[3]{5}$; $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$.

Não é nada elementar demonstrar que tais números são irracionais. Mais adiante voltaremos a esse assunto, demonstrando que $\sqrt{5}$ é, de fato, um número irracional.

2 Representação na reta orientada

Reta orientada e as noções de direita e esquerda:



O ponto P não está nem à direita, nem à esquerda de P.

Fixar uma *orientação* na reta é fixar um *sentido de percurso*, como mostrado na figura acima. Feito isso, os pontos *à direita* de um ponto P da reta são aqueles que podem ser acessados a partir de P, seguindo o sentido de percurso fixado, ou seja, seguindo a orientação fixada. Na figura acima, Q está à direita de P. Os pontos *à esquerda* de P são aqueles que podem ser acessados a partir de P, seguindo o sentido de percurso contrário ao fixado. Na figura acima, R está à esquerda de P.

Duas conseqüências imediatas dos conceitos de direita e esquerda são:

☞ *Se P está à direita de Q e se Q está à direita de R então P está à direita de R.*

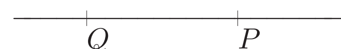


☞ *Se P está à esquerda de Q e se Q está à esquerda de R então P está à esquerda de R.*



Essa é a *propriedade transitiva* das relações de direita e esquerda. Já vimos essa propriedade na inclusão de conjuntos. Outra propriedade imediata é a seguinte:

☞ *P está à direita de Q se, e somente se, Q está à esquerda de P.*



Além dessas propriedades temos também que:

☞ *dados dois pontos P, Q da reta, ocorre uma e apenas uma das três alternativas*:

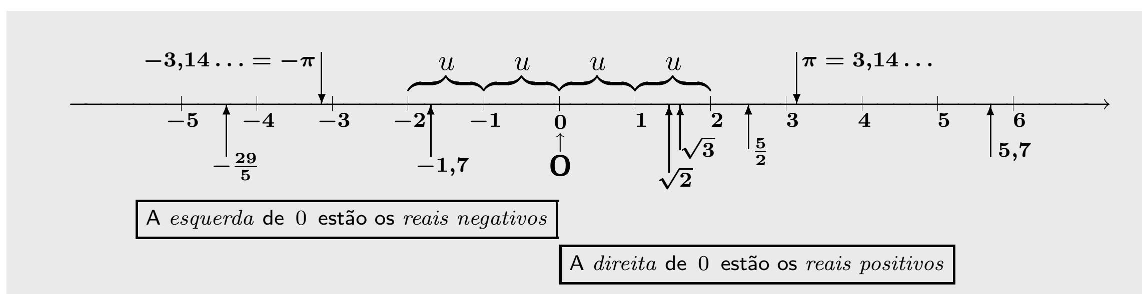
- *P e Q coincidem*
- *P está à direita de Q*
- *P está à esquerda de Q.*

A reta munida de uma orientação é dita *reta orientada*.

Fixemos agora uma reta orientada (dita, simplesmente, *reta*), um ponto **O** sobre ela (chamado de *origem*) e um segmento de reta u (chamado de *unidade de comprimento*), como mostrados na figura a seguir.



Com esses três objetos e algumas construções geométricas vamos localizar na reta os inteiros, os racionais e números irracionais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... etc. Também vamos utilizar *estimativas* para ter uma idéia da localização de outros números, racionais ou irracionais, na reta. No momento, apesar de não termos ainda uma idéia precisa sobre a representação dos números reais como pontos da reta, sabemos entender com clareza o diagrama abaixo.



Por enquanto parece *magia*, mas a escolha da orientação, da unidade u e da origem O determinam na reta, de forma precisa, a posição de cada um dos números reais. Além disso,

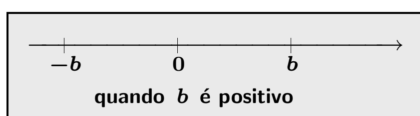
para cada ponto da reta existe um número real que ali se localiza. Isso significa que números reais e pontos da reta estão em *bijeção*.

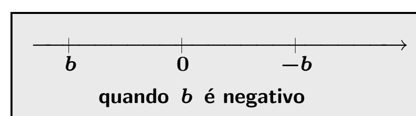
O número real *zero* não é positivo, tampouco negativo. Ele é o número real *nulo*.

No diagrama anterior um número está localizado erradamente. Qual é esse número ?

Repare que π e $-\pi$ estão *eqüidistantes da origem*, isto é, estão à uma mesma *distância* da origem. Essa distância vale π. Lembre-se que distância, bem como área e volume, nunca são negativos.

Assim como π e $-\pi$, os números b e $-b$ estão eqüidistantes da origem **O**. Mostramos isso nos diagramas a seguir. Dizemos que b e $-b$ são *simétricos* em relação a origem.

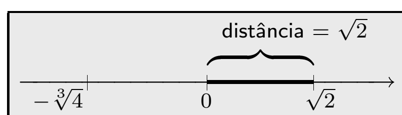


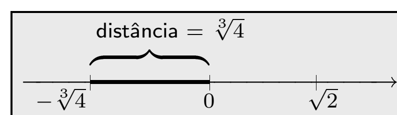


Aliás, quanto vale a distância de b *a origem ?*

Cuidado! Não podemos dizer que vale b pois b pode ser negativo. Não podemos dizer que vale $-b$ pois b pode ser positivo. No entanto, sabemos responder:

☞ a distância de $\sqrt{2}$ a origem vale $\sqrt{2}$; ☞ a distância de $-\sqrt[3]{4}$ a origem vale $\sqrt[3]{4}$.





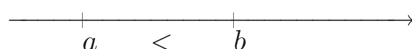
Para colocarmos de maneira clara a noção de distância entre números reais, passemos às noções de maior e menor, e sua relação com direita e esquerda.

3 Direita e esquerda $\times$ maior e menor

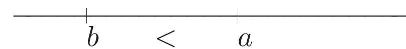
Agora que já identificamos números reais com pontos da reta, podemos traduzir as noções de direita e esquerda, em relações entre números reais.

Dados $a\,, b \in \mathbb{R}$ diremos:

☞ a é *menor* do que b quando a está à esquerda de b e escrevemos $a < b$;



☞ a é *maior* do que b quando a está à direita de b e escrevemos $a > b$.



As relações de menor e maior são ditas *relações de ordem* entre os números reais.

As propriedades de direita e esquerda, vistas anteriormente, tomam a seguinte forma:

☞ $\boldsymbol{a < b}$ **e** $\boldsymbol{b < c \implies a < c}$ ☞ $\boldsymbol{a < b \iff b > a}$

☞ Dados $\boldsymbol{a\,,b} \in \mathbb{R}$, ocorre uma e apenas uma das três alternativas:
- $\boldsymbol{a = b}$
- $\boldsymbol{a < b}$
- $\boldsymbol{a > b}$

Escrevemos $a \leq b$ quando $a < b$ ou $a = b$. Analogamente, escrevemos $a \geq b$ quando $a > b$ ou $a = b$ e temos:

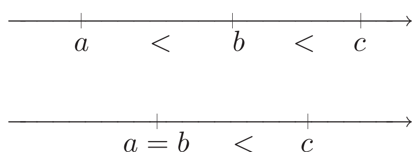
- $\boldsymbol{a \leq b}$ **e** $\boldsymbol{b \leq c \implies a \leq c}$
- $\boldsymbol{a \leq b \iff b \geq a}$

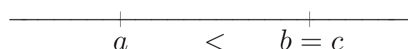
Quando $a < b$ e $b < c$ escrevemos $a < b < c$. Nesse caso dizemos que a e c são *estimativas* para b. Com significado análogo, escrevemos: $a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a \leq b \leq c$.

Note que:

- $\boldsymbol{a \leq b}$ **e** $\boldsymbol{b < c \implies a < c}$
- $\boldsymbol{a < b}$ **e** $\boldsymbol{b \leq c \implies a < c}$

Você pode ver essas propriedades graficamente. Isso é mostrado nas figuras a seguir.





Nesses três diagramas, o número a está a esquerda de c.

Exemplos

❄ $2 < 3$; $-4 < -3$; $3 < \pi < 4$.

❄ $1 < \sqrt{2} \leq 2$; $\sqrt{3} \leq 2 < \sqrt{5}$.

❄ De $x < 3$ e $3 < \pi$ segue que $x < \pi$.

❄ $x < \sqrt{2} + y \iff \sqrt{2} + y > x$.

❄ De $x > y + 1$ e $y + 1 \geq \pi$ segue que $x > \pi$.

❄ Se $z \leq x + y$ e $x + y < 2$ então $z < 2$.

❄ De $x < 2$ segue que $x < \pi$ pois $2 < \pi$.

❄ Se $x \geq 0$ então $x \geq -1$ pois $0 \geq -1$.

❄ Se $2x \leq 5$ e $5 \leq y$ então $2x \leq y$.

❄ $x + 1 < z$ e $z < \sqrt{2} \implies x + 1 < \sqrt{2}$.

❄ Se $x < y$ e $y \leq 2$ então $x < 2$.

❄ Se $z \leq x$ e $x < \pi$ então $z < \pi$.

❄ $x \leq y$ e $y \leq -\sqrt{2} \implies x \leq -\sqrt{2}$.

❄ $z^2 \leq \sqrt{3} \iff \sqrt{3} \geq z^2$.

4 Módulo

A *distância* de um número real b a origem é denotada por $|b|$ e vale:

$$|b| := \begin{cases} b & \text{quando } b > 0 \\ 0 & \text{quando } b = 0 \\ -b & \text{quando } b < 0. \end{cases}$$

Exemplos

❄ Distância de 2 a origem $= |2| = 2$;

❄ Distância de $\frac{2}{3}$ a origem $= \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$;

❄ Distância de $\sqrt{2}$ a origem $= |\sqrt{2}\,| = \sqrt{2}$;

❄ Distância de -4 a origem $= |-4| = -(-4) = 4$;

❄ Distância de $-\pi$ a origem $= |-\pi| = -(-\pi) = \pi$;

❄ Distância de $-\frac{7}{5}$ a origem $= \left|-\frac{7}{5}\right| = -\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5}$.

Também dizemos que $|b|$ é o *módulo* ou *valor absoluto* do número real b.

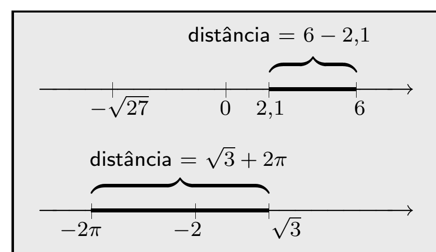
Da mesma forma como pensamos na distância de um número real a origem, podemos imaginar o que deve ser a distância entre dois números reais. Por exemplo:

☞ A distância de $2{,}1$ a 6 deve ser $6 - 2{,}1$;

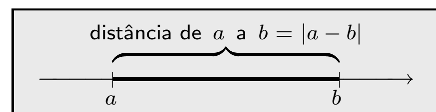
☞ A distância de $-\sqrt{27}$ a $2{,}1$ será $2{,}1 + \sqrt{27}$;

☞ A distância de -2π a $\sqrt{3}$ vale $\sqrt{3} + 2\pi$;

☞ A distância de -2π a -2 vale $2\pi - 2$.



Assim, a distância entre dois pontos distintos da reta será: *número maior - número menor*. Dito de outra forma:



$$\textit{Distância de } a \textit{ até } b := \begin{cases} a-b & \text{quando } a>b \\ 0 & \text{quando } a=b \\ b-a & \text{quando } b>a. \end{cases}$$

Do que acabamos de definir segue que a distância de a até b vale $|a-b|$.
Comparando com os exemplos acima temos:

☞ A distância de $2{,}1$ a 6 vale $|2{,}1-6| = |-3{,}9| = 3{,}9$;

☞ A distância de $-\sqrt{27}$ a $2{,}1$ vale $|-\sqrt{27}-2{,}1| = \sqrt{27}+2{,}1$;

☞ A distância de 2π a $-\sqrt{3}$ vale $|2\pi-(-\sqrt{3})| = |2\pi+\sqrt{3}| = 2\pi+\sqrt{3}$;

☞ A distância de -2π a -2 vale $|-2\pi-(-2)| = |-2\pi+2| = 2\pi-2$ pois $2\pi > 2$.

Outra forma de apresentar $|b|$ e $|a-b|$ é a seguinte:

$$|b| = \begin{cases} b & \text{quando } b \geq 0 \\ -b & \text{quando } b \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad |a-b| = \begin{cases} a-b & \text{quando } a \geq b \\ b-a & \text{quando } b \geq a\,. \end{cases}$$

4.1 Propriedades do módulo

Dentre as propriedades do módulo de números reais, destacamos as seguintes:

1. $|a| \geq 0$. Além disso: $|a| = 0 \iff a = 0$;

2. $|a| = |b| \iff a = \pm b$;

3. $|a \times b| = |a| \times |b|$;

4. $|a/b| = |a|/|b|$ quando $b \neq 0$.

A primeira e a segunda propriedades nos ensinam *resolver equações elementares* (vide exemplos a seguir) enquanto que as outras nos fornecem simplificações.

Exemplos

❄ $|x-2| = 0 \iff x-2=0 \iff x=2.$

❄ $|3+2x| = 0 \iff 3+2x=0 \iff x=-3/2\,.$

❄ $|x+3{,}1| = 0 \iff x+3{,}1=0 \iff x=-3{,}1\,.$

❄ $|1-x| = |2x| \iff 1-x = \pm 2x \iff 1-x = 2x$ ou $1-x = -2x \iff x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$.

❄ $|x-y| = 2 \iff |x-y| = |2| \iff x-y = \pm 2 \iff x-y = 2$ ou $x-y = -2$.

❄ $|x-y+2| = 0 \iff x-y+2 = 0 \iff x+2 = y$.

❄ $|x^2-1| = 0 \iff x^2-1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$.

❄ $|-b| = |(-1)\times b| = |-1| \times |b| = |b|$.

Atenção:
Não podemos afirmar que $|-b|$ vale b, a menos que saibamos, a priori, que $b \geq 0$.

$$|-\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}| \ , \ \forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$$

❄ $|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$.

$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \ , \ \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$$

❄ $|x^2+1| = x^2+1$ pois $x^2+1 \geq 0$.

❄ $|2\,x| = |2|\,|x| = 2\,|x|$.

❄ $|x/3| = |x|/|3| = |x|/3 = \frac{1}{3}\,|x|$.

❄ $x^2 = |x^2| = |x\,x| = |x|\,|x| = |x|^2$.

❄ $|\frac{x+1}{\sqrt{2}}| = \frac{|x+1|}{|\sqrt{2}|} = \frac{|x+1|}{\sqrt{2}}$.

❄ $|\frac{x-1}{x^2+1}| = \frac{|x-1|}{x^2+1}$ pois $x^2+1 > 0$

5 Intervalos da reta

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. *Intervalos da reta* ou, simplesmente, *intervalos* são os subconjuntos da reta listados a seguir. Os números a e b são as *extremidades* dos intervalos.

Notação	Definição	Representações gráficas
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	$\{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x \leq b\}$	a b a b
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	$\{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x < b\}$	a b a b
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	$\{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x < b\}$	a b a b
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	$\{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x \leq b\}$	a b a b

Os intervalos acima são ditos *intervalos limitados de comprimento* $b - a$. O intervalo (a, b) é um *intervalo aberto* enquanto que $[a, b]$ é um *intervalo fechado*.

Notação	Definição	Representações gráficas
$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x < b\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \geq a\}$	
(a, ∞)	$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x > a\}$	

Os intervalos acima são intervalos *não limitados*. A reta também é entendida como um intervalo não limitado. Nesse caso usamos a notação $(-\infty, \infty)$ para representá-la.

Os símbolos[1] ∞ e $-\infty$ não representam números reais. Por isso, quando descrevemos um intervalo não limitado os símbolos ∞ e $-\infty$ sempre aparecem acompanhados de um parênteses e nunca de um colchete. Como vimos, nas definições acima, a presença de um colchete na extremidade do intervalo indica que tal extremidade *faz parte do intervalo*. A presença de um parênteses indica que a extremidade *não faz parte do intervalo*.

Da forma como definido, um intervalo pode ser vazio, como por exemplo, o intervalo aberto $(0, 0)$. Também pode se reduzir a um ponto, como por exemplo, o intervalo fechado $[0, 0]$.

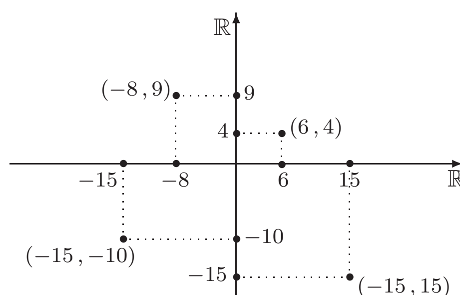
Um intervalo é dito *não degenerado* quando contém mais de um ponto. Conseqüentemente, intervalos não degenerados são aqueles que contém intervalos abertos não vazios.

6 O plano cartesiano

Sabendo localizar pontos na reta $\mathbb{R}$ também saberemos localizar pontos no produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para isso, fixemos em ambas as cópias de $\mathbb{R}$ uma mesma origem, uma mesma unidade de comprimento e a mesma orientação. Com esses ingredientes, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é dito *plano catesiano*.

[1]Também é usado o símbolo $+\infty$ no lugar de ∞.

Sua representação gráfica é mostrada na figura ao lado, onde marcamos alguns pontos. Note que estamos confundindo nessa figura o ponto 6 sobre o eixo das abcissas com o ponto $(6,0) \in \mathbb{R}^2$. Da mesma forma, estamos confundindo o número 4 sobre o eixo das ordenadas com o ponto $(0,4) \in \mathbb{R}^2$. Isso é natural e facilita a visualização.



Exercícios resolvidos

1. **Qual a distância dos números reais 3 , -5 , $-\sqrt{5}$, $-4{,}01$, $\sqrt[3]{7}$ e 0 a origem ?**

Solução Por definição de distância de um número real a origem temos que:

- a distância de 3 a origem vale 3;
- a distância de -5 a origem vale 5;
- a distância de $-\sqrt{5}$ a origem vale $\sqrt{5}$;
- a distância de $-4{,}01$ a origem vale $4{,}01$;
- a distância de $\sqrt[3]{7}$ a origem vale $\sqrt[3]{7}$;
- a distância de 0 a origem vale 0.

2. **Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras ? Use as propriedades enunciadas na página 39 para justificar suas respostas.**

(a) $x < 2 \implies x < 3$;
(b) $x < y$ e $y < 5 \implies x < 5$;
(c) $1 \leq x$ e $x \leq y + z \implies 1 \leq y + z$;
(d) $x \leq -1$, $-1 \leq z$ e $z \leq y - 1 \implies x \leq y - 1$;
(e) $x < y$ e $y < 5 \implies x < 8$;
(f) $x < y$ e $y < 5 \implies x < 4$.

Solução Repare que para responder a essa pergunta precisamos exibir as afirmações que são verdadeiras e também aquelas que são falsas. Só assim teremos respondido a pergunta colocada.

De $x < 2$ e $2 < 3$ segue que $x < 3$. Isso mostra que a afirmação do item (a) é VERDADEIRA.

Nos itens (b) e (c) as afirmações são VERDADEIRAS. Elas são aplicações imediatas da propriedade de transitividade da relação de menor e da relação de menor ou igual.

A afirmação do item (d) também é VERDADEIRA. É a transitividade usada duas vêzes. Vejamos:

- De $x \leq -1$ e $-1 \leq z$ segue que $x \leq z$.
- Por outro lado, de $x \leq z$ e $z \leq y - 1$ segue que $x \leq y - 1$,

como queríamos demonstrar.

No item (e) temos: $x < y$ e $y < 5 \implies x < 5 \implies x < 8$.

Isso mostra que a afirmação do item (e) é VERDADEIRA.

A afirmação no item (f) é FALSA. Para mostrar isso, precisamos exibir valores de x e de y satisfazendo as condições $x < y$ e $y < 5$ mas não satisfazendo a condição $x < 4$. Um tal exemplo pode ser construído, tomando: $x = 4{,}5$ e $y = 4{,}7$. Para tais valores de x e y temos:

$$x = 4{,}5 < 4{,}7 = y \text{ e } y = 4,7 < 5 \text{ mas, no entanto, } x = 4,5 \not< 4\,.$$

Esse exemplo é dito um *contra-exemplo* para a afirmação do item (f).

☛ **Atenção:** Note que escrevemos um pouco acima $4,5 \not< 4$ para indicar que $4{,}5$ não é maior do que 5. Essa foi uma notação fixada na Lição 1. Aproveitando a oportunidade, pergunta-se: qual é a negação da afirmação "$a < b$", ou seja, como escrever a afirmação "a *não é menor do que* b" em termos das desigualdades que estudamos ? Vejamos: se a não é menor do que b então nos restam duas alternativas: $a > b$ ou $a = b$. Portanto: $a \not< b \iff a \geq b$.

3. **Faça os cálculos:**

(a) $|2 + \pi|$ **(b)** $|2 - 3{,}01|$ **(c)** $|-1{,}1 - 3{,}2|$
(d) $|-0{,}3 + 2{,}1|$ **(e)** $|\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1|$ **(f)** $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}|$.

Solução Temos que:

(a) $|2 + \pi| = 2 + \pi$;

(b) $|2 - 3{,}01| = 3{,}01 - 2 = 1{,}01$;

(c) $|-1{,}1 - 3{,}2| = |-4{,}3| = 4{,}3$;

(d) $|-0{,}3 + 2{,}1| = 2{,}1 - 0{,}3 = 1{,}8$;

(e) $|\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1| = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$ pois $\sqrt{3} > \sqrt{2}$;

(f) $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ pois $1 + \sqrt{2} > \sqrt{3}$.

4. **Calcule a distância entre os números dados e represente graficamente essa distância.**

(a) $\sqrt{20}$ **e** $7{,}4$ **(b)** $-\pi$ **e** 1 **(c)** $0{,}7$ **e** $-1{,}2$ **(d)** $-2{,}3$ **e** $-4{,}7$.

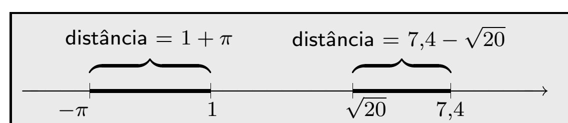
Solução Façamos os cálculos:

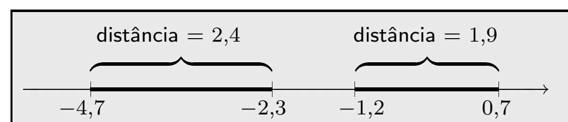
(a) A distância de $\sqrt{20}$ a $7{,}4$ é dada por:
$|\sqrt{20} - 7{,}4| = 7{,}4 - \sqrt{20}$ pois $7{,}4 > \sqrt{20}$.

(b) A distância de $-\pi$ a 1 vale:
$|-\pi - 1| = 1 + \pi$.

(c) A distância de $0{,}7$ a $-1{,}2$ é dada por:
$|0{,}7 - (-1{,}2)| = |0{,}7 + 1{,}2| = 1{,}9$.

(d) A distância de $-2{,}3$ a $-4{,}7$ é dada por:
$|-2{,}3 - (-4{,}7)| = |4{,}7 - 2{,}3| = 4{,}7 - 2{,}3 = 2{,}4$.





5. **Resolva as equações:**

(a) $|x + 1| = 0$ **(b)** $|2x - 3| = 0$ **(c)** $|\pi - x| = 0$ **(d)** $|3 - x^2| = 0$.

Solução Da propriedade (1) do módulo, segue que:

(a) $|x+1| = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1.$

(b) $|2x-3| = 0 \iff 2x-3 = 0 \iff x = 3/2.$

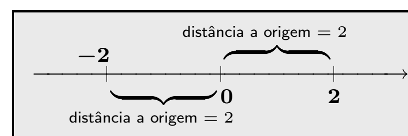
(c) $|\pi - x| = 0 \iff \pi - x = 0 \iff x = \pi.$

(d) $|3-x^2| = 0 \iff 3-x^2 = 0 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}\,.$

6. **Quais são os números reais cuja distância a origem vale 2? Dito de outra forma, resolva a equação $|x| = 2$.**

Solução Os pontos da reta cuja distância a origem vale 2 são os pontos 2 e -2. Ou seja,

$$|x| = 2 \iff x = \pm 2\,.$$



7. **Quantas soluções possui a equação $|x^3 - 2x + 5| = -1$?**

Solução Essa equação não possui soluções pois o valor absoluto de qualquer número real não pode ser negativo.

8. **Resolva as equações:**
(a) $|x+1| = 2$ (b) $|2x+3| = 4$ (c) $|\pi - x| = 1$
(d) $|3-x^2| = 2$ (e) $|2-3x| = |x|$ (f) $|x+2| = |2x-1|$.

Solução Usando a propriedade (2) do módulo, obtemos:

(a) $|x+1| = 2 \iff |x+1| = |2| \iff x+1 = \pm 2 \iff x = -1 \pm 2$
$\iff x = 1$ ou $x = -3.$

(b) $|2x+3| = 4\ (= |4|) \iff 2x+3 = \pm 4 \iff 2x = -3 \pm 4 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{7}{2}.$

(c) $|\pi - x| = 1\ (= |1|) \iff \pi - x = \pm 1 \iff \pi \mp 1 = x \iff x = \pi - 1$ ou $x = \pi + 1.$

(d) $|3-x^2| = 2 \iff 3-x^2 = \pm 2 \iff x^2 = 3 \mp 2 \iff x^2 = 1$ ou $x^2 = 5.$

Portanto: $|3-x^2| = 2 \iff x \in \{1\,, -1\,, \sqrt{5}\,, -\sqrt{5}\}.$

(e) $|2-3x| = |x| \iff 2-3x = \pm x \iff 2 = 3x \pm x \iff 4x = 2$ ou $2x = 2.$

Logo: $|2-3x| = |x| \iff x = 1/2$ ou $x = 1.$

(f) $|x+2| = |2x-1| \iff x+2 = \pm(2x-1) \iff x+2 = 2x-1$ ou $x+2 = -2x+1.$

conseqüentemente $x = 3$ ou $x = -1/3.$

9. **Dê uma equação que descreva os pontos da reta cuja distância à 2 vale 5. Resolva tal equação.**

Solução Seja x um tal ponto. Sua distância à 2 vale $|x-2|$. conseqüentemente a equação procurada é $|x-2|=5$. Para resolver tal equação, usamos a propriedade (2) do módulo e obtemos:

$$|x-2|=5 \iff x-2=\pm 5 \iff x=2\pm 5 \iff x=7 \text{ ou } x=-3\,.$$

Assim, os pontos procurados são -3 e 7.

10. Dê uma equação que descreva os pontos da reta cuja distância a -2 é o triplo da distância a 8. Resolva tal equação.

Solução Seja x um tal ponto. Temos que:

- A distância de x ao ponto -2 vale $|x-(-2)|=|x+2|$;
- A distância de x ao ponto 8 vale $|x-8|$.

Logo, a equação $|x+2|=3\,|x-8|$ descreve os pontos em questão. Resolvendo-a, temos:

$$\begin{aligned}
|x+2|=3\,|x-8| &\iff |x+2|=|3x-24| \iff x+2=\pm(3x-24)\\
&\iff x+2=3x-24 \text{ ou } x+2=-(3x-24)\\
&\iff 2x=26 \text{ ou } x+2=24-3x\\
&\iff x=13 \text{ ou } 4x=22\\
&\iff x=13 \text{ ou } x=11/2.
\end{aligned}$$

Assim, os pontos procurados são 13 e $11/2$.

11. Dê uma equação que descreva os números reais que têm a seguinte propriedade: o número ao quadrado é igual ao cubo de sua distância a $-\pi$.

Solução Seja x um tal número.

- Seu quadrado vale x^2;
- Sua distância a $-\pi$ vale $|x-(-\pi)|=|x+\pi|$.

Conseqüentemente, os números procurados são aqueles que satisfazem a equação: $x^2=|x+\pi|^3$.

12. Dê uma equação que descreva os números reais cuja distância ao seu quadrado vale 20.

Solução Denotemos por x um tal número. A distância de x ao seu quadrado x^2 vale $|x-x^2|$. conseqüentemente os números procurados são, exatamente, as soluções da equação $|x-x^2|=20$.

13. Determine uma equação que descreva o conjunto dos pontos da reta cujo cubo da distância ao ponto -2 vale 8.

Solução Denotemos por x um tal ponto. Sabemos que:

- a distância de x a -2 vale $|x-(-2)| = |x+2|$;
- o cubo de tal distância será $|x+2|^3$.

Conseqüentemente, uma equação que descreve o conjunto de pontos em questão é

$$|x+2|^3 = 8\,.$$

14. Determine uma inequação que descreva os pontos da reta que têm a seguinte propriedade: a distância do ponto ao dobro do seu quadrado é maior que o translado do ponto por -2.

Solução Denotemos por y um tal ponto. Temos que:

- o dobro do quadrado de y vale $2y^2$;
- a distância de y ao dobro do seu quadrado vale $|y-2y^2|$;
- o transladado de y por 2 vale $y+2$.

Conseqüentemente, se a distância de y ao dobro do seu quadrado deve ser maior que o transladado de y por 2 então, devemos ter

$$|y-2y^2| > y+2\,.$$

15. Sejam $x\,,\,y \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? Justifique suas respostas.

(a) $|x| = 2 \implies x = 2$;
(b) $x > y \implies |x| > |y|$;
(c) $x < 0 \implies |x| + x = 0$.

Solução Para isso, vamos analisar cada uma das implicações acima, usando as propriedades do módulo e das desigualdades estudadas nessa Lição.

(a) A afirmação é FALSA pois x pode ser igual a -2.

(b) Essa afirmação é FALSA pois $0 > -1$ mas, no entanto, $|0|$ *não é maior do que* $|-1| = 1$.

(c) De $x<0$ segue que $|x| = -x$. conseqüentemente $|x|+x=0$. Logo, a afirmação é VERDADEIRA.

16. A afirmação $|b^2| = |b|^2 = b^2$ é verdadeira para todo b real?

Solução Sabemos que $b^2 \geq 0$. conseqüentemente $|b^2| = b^2$. Agora, usando a terceira propriedade do módulo obtemos:

$$b^2 = |b^2| = |b \times b| = |b| \times |b| = |b|^2.$$

Logo, a afirmação é VERDADEIRA.

$$|b^2| = |b|^2 = b^2$$

17. Sejam a e b números reais distintos. Determine a expressão do ponto médio definido por esses dois pontos.

Solução Seja λ esse ponto médio. O que determina λ é o fato dele estar a uma mesma distância de a e de b. Logo, ele é solução da equação:

$$|\lambda - a| = |\lambda - b| \iff \lambda - a = \pm(\lambda - b) \iff \lambda - a = \lambda - b \text{ ou } \lambda - a = -\lambda + b$$
$$\iff a = b \text{ ou } 2\lambda = a + b\,.$$

Como $a \neq b$ resta então $\lambda = (a+b)/2$ como solução da equação inicial.

Portanto, a expressão do ponto médio λ definido por a e b é $\lambda = (a+b)/2$.

18. Represente graficamente os intervalos listados abaixo e verifique se os números 3 , π , $\sqrt{2}$, $3/2$, $-11/7$ pertencem a tais intervalos.

(a) $(-1\,,3\,]$ **(b)** $(1\,,\,2\pi)$ **(c)** $(2\,,\,\infty)$.

Solução Graficamente, temos:



Para completar a solução afirmamos que:

(a) $3 \in (-1\,,3\,]$; $\pi \notin (-1\,,3\,]$; $\sqrt{2} \in (-1\,,3\,]$; $3/2 \in (-1\,,3\,]$; $-11/7 \notin (-1\,,3\,]$.
(b) $3 \in (1\,,2\pi)$; $\pi \in (1\,,2\pi)$; $\sqrt{2} \in (1\,,2\pi)$; $3/2 \in (1\,,2\pi)$; $-11/7 \notin (1\,,2\pi)$.
(c) $3 \in (2\,,\infty)$; $\pi \in (2\,,\infty)$; $\sqrt{2} \notin (2\,,\infty)$; $3/2 \notin (2\,,\infty)$; $-11/7 \notin (2\,,\infty)$.

19. Determine os números reais x , y , z indicados pelas setas dos diagramas a seguir.



Nos diagramas acima os intervalos forão divididos em partes iguais.

Solução No primeiro diagrama o intervalo $[\,0\,,1\,]$ foi dividido em 4 partes iguais. Idem para os outros intervalos nessa figura. Assim, cada subintervalo mede $\frac{1}{4}$. Consequentemente:

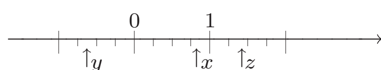
$$y = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \quad ; \quad x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad ; \quad z = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

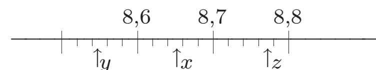
No segundo diagrama, o intervalo $[\,8{,}6\,,8{,}7\,]$ (cujo comprimento é $0{,}1$) foi dividido em 5 partes iguais. Idem para $[\,8{,}5\,,8{,}6\,]$ e $[\,8{,}7\,,8{,}8\,]$. Portanto, cada subintervalo tem comprimento igual a $\frac{0{,}1}{5} = 0{,}02$.

Concluímos então que:

$$y = 8{,}5 + 2 \times 0{,}02 = 8{,}54 \quad ; \quad x = 8{,}6 + 3 \times 0{,}02 = 8{,}6 + 0{,}06 = 8{,}66 \quad ; \quad z = 8{,}8 - 0{,}02 = 8{,}78.$$

20. Faça estimativas para os números x , y , z indicados pelas setas dos diagramas a seguir.





Nos diagramas acima os intervalos forão divididos em partes iguais.

Solução Como no exercício anterior, o intervalo $[0,1]$ foi dividido em 4 partes iguais. Cada subintervalo mede $\frac{1}{4}$. conseqüentemente podemos estabelecer as seguintes estimativas:

$$-\frac{3}{4} = -1+\frac{1}{4} < y < -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{3}{4} = 1-\frac{1}{4} < x < 1 \quad ; \quad \frac{5}{4} = 1+\frac{1}{4} < z < 1+\frac{2}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ou seja,

$$-\frac{3}{4} < y < -\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{3}{4} < x < 1 \quad ; \quad \frac{5}{4} < z < \frac{3}{2}.$$

Novamente, como vimos no exercício anterior, o intervalo $[8{,}6\,,8{,}7]$ foi dividido em 5 partes iguais. Assim, cada subintervalo tem comprimento $\frac{0{,}1}{5} = 0{,}02$.

Podemos então concluir as seguintes estimativas para $x\,,y\,,z$:

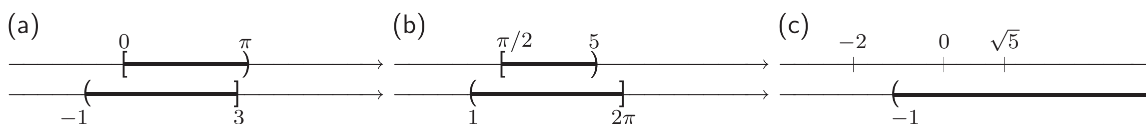
$$\begin{aligned} 8{,}54 = 8{,}5 + 2\times 0{,}02 \quad &< \ y \ < \quad 8{,}5 + 3\times 0{,}02 = 8{,}56 \\ 8{,}64 = 8{,}6 + 2\times 0{,}02 \quad &< \ x \ < \quad 8{,}6 + 3\times 0{,}02 = 8{,}66 \\ 8{,}76 = 8{,}7 + 3\times 0{,}02 \quad &< \ z \ < \quad 8{,}78. \end{aligned}$$

☛ **Nota:** Quando apresentamos uma estimativa do tipo $a < x < b$ para x, estamos afirmando que $x \in (a\,,b)$. No exercício acima, concluímos que $x \in (8{,}64\,,8{,}66)$, que $y \in (8{,}54\,,8{,}56)$ e que $z \in (8{,}76\,,8{,}78)$.

21. **Escreva os conjuntos a seguir como uma união de intervalos disjuntos. Faça isso de tal maneira que os intervalos tenham o maior comprimento possível.**

(a) $(-1\,,3\,] \cap [\,0\,,\pi)$ **(b)** $(1\,,\,2\pi] - [\frac{\pi}{2}\,,5\,)$ **(c)** $(-1\,,\,\infty) - \left\{-\,2\,,0\,,\sqrt{5}\right\}$.

Solução Graficamente temos as seguintes situações.



Com essas representações gráficas, fica fácil escrever os conjuntos como união de intervalos possuindo o maior comprimento possível. Assim, temos:

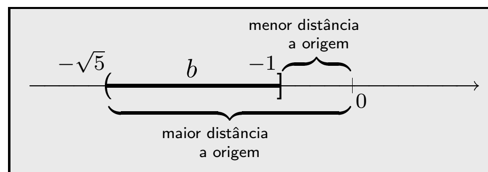
$$(-1\,,3\,] \cap [\,0\,,\pi) = [\,0\,,3\,] \quad ; \quad (1\,,2\pi\,] - [\pi/2\,,5\,) = (1\,,\pi/2\,) \cup [\,5\,,2\pi\,] \quad \text{e}$$

$$(-1\,,\,\infty) - \{-\,2\,,0\,,\sqrt{5}\,\} = (-1\,,0) \cup \big(0\,,\sqrt{5}\big) \cup (\sqrt{5}\,,\infty)\,.$$

22. **Sabendo que $b \in (-\sqrt{5}\,,-1\,]$ determine o menor[2] intervalo que contém $|b|$. Faça uma figura que represente claramente sua solução.**

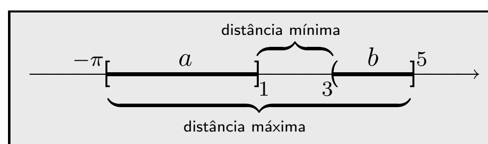
[2]Sem fugir da nossa intuição, dizemos que um conjunto A é *menor* que um conjunto B quando $A \subsetneq B$. Dito de outra forma: um conjunto B é *maior* que um conjunto A quando $B \supsetneq A$.

Solução O módulo de um número real é a distância desse número a origem. A distância de qualquer ponto b do intervalo $(-\sqrt{5}\,,-1\,]$ a origem é *maior ou igual* a distância de -1 a origem, pois $-1 \in (-\sqrt{5}\,,-1\,]$, e é *menor* do que a distância de $-\sqrt{5}$ a origem, já que $-\sqrt{5} \notin (-\sqrt{5}\,,-1\,]$. conseqüentemente concluímos que $1 \leq |b| < \sqrt{5}$, ou seja, o menor intervalo procurado é o intervalo $[\,1\,,\sqrt{5}\,)$.



23. Sabendo que $a \in [\,-\pi\,,1\,]$ e $b \in (3\,,5\,]$ faça uma estimativa para $|a-b|$. Faça uma figura que represente sua solução de forma clara.

Solução Façamos a representação gráfica dos intervalos em questão, como mostrado na figura ao lado. Sabemos que $|a-b|$ é a distância de a até b. A distância entre a e b é sempre *maior* do que a distância de 3 a 1, pois, $3 \notin (3\,,5\,]$, e é *menor ou igual* que a distância de 5 a $-\pi$ pois $-\pi \in [\,-\pi\,,1\,]$ e $5 \in (3\,,5\,]$. Logo, $2 < |b-a| \leq 5+\pi$.



24. Para cada número real x defina

$$[x] = \begin{cases} \mathbf{1-x} & \textbf{quando } \ x \geq 2 \\ \mathbf{2+|x|} & \textbf{quando } \ x < 2. \end{cases}$$

(a) Calcule $[-2]$, $[2]$ e $[5]$;

(b) Pergunta-se: $[4x] = 4[x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

(c) Sabendo que $1 \leq x < 2$ faça uma estimativa para $[3x]$.

Solução

(a) Da definição de $[x]$ segue que:

- $[-2] = 2 + |2| = 4$ pois $-2 < 2$;
- $[2] = 1 - 2 = -1$ pois $2 \geq 2$;
- $[5] = 1 - 5 = -4$ pois $5 \geq 2$.

(b) A resposta a essa pergunta é não pois, para $x = 1$ temos que:

- $[4x] = [4 \times 1] = [4] = 1 - 4 = -3$ pois $4 \geq 2$;
- mas, no entanto, $4[x] = 4[1] = 4(2 + |1|) = 12$.

(c) Para $1 \leq x < 2$ resulta que $3 \times 1 \leq 3x < 3 \times 2$, ou seja, $3 \leq 3x < 6$. Nesse caso, $[3x] = 1 - 3x$ já que $3x \geq 3 \geq 2$ e temos:

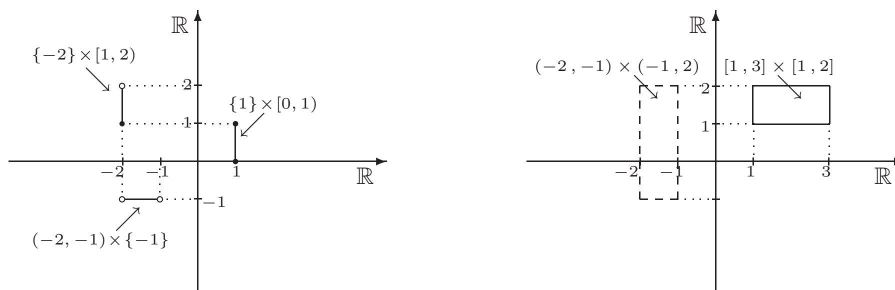
$$\begin{aligned} 1 \leq x < 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad -3 \geq -3x > -6 \quad \Longleftrightarrow \quad -6 < -3x \leq -3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1-6 < 1-3x \leq 1-3 \quad \Longleftrightarrow \quad -5 < 1-3x \leq -2\,. \end{aligned}$$

Assim, a estimativa para $[3x]$ é: $-5 < [3x] \leq -2$.

25. Esboce no plano cartesiano os conjuntos

(a) $\{1\} \times [\,0\,,1\,]$ **(b)** $\{-2\} \times [\,1\,,2\,)$ **(c)** $(\,-2\,,-1) \times \{-1\}$
(d) $[\,1\,,3\,] \times [\,1\,,2\,]$ **(e)** $(-2\ -1\,) \times (-1\,,2\,)$ **.**

Solução Observe que o ponto $(-2\,,2\,)$ não faz parte do conjunto $\{-2\} \times [\,1\,,2\,)$ pois $-2 \notin [\,1\,,2\,)$. Além disso, os pontos $(-2\,,-1\,)$ e $(-1\,,-1\,)$ não fazem parte do conjunto $(-2\,,-1) \times \{-1\}$ pois -2 e -1 não pertencem ao intervalo $(-2\,,-1\,)$.

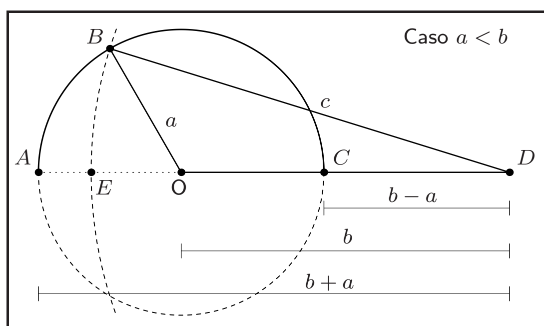


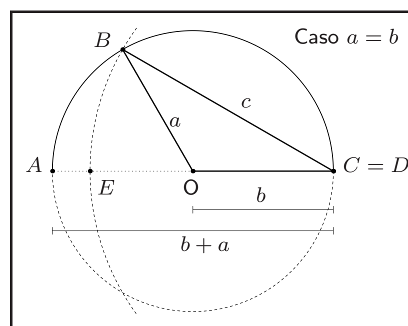
Note que do conjunto $[\,1\,,3\,] \times [\,1\,,2\,]$ fazem parte os pontos do retângulo desenhado em linha contínua e todos os pontos em seu interior. Do conjunto $(-2\,,-1\,) \times (-1\,,2\,)$ fazem parte apenas os pontos interiores ao retângulo desenhado em linha tracejada. Os pontos sobre esse retângulo não fazem parte do conjunto $(-2\,,-1\,) \times (-1\,,2\,)$.

26. No exercício 10 da página 19 afirmamos que: ***Três números reais positivos são medidas dos lados de um triângulo quando, e somente quando, cada um deles é maior que o módulo da diferença e menor que a soma dos outros dois.*** **Como visualizar esse fato ?**

Solução Vejamos, primeiramente, que se três números positivos são medidas dos lados de um triângulo então: cada um deles é maior que o módulo da diferença e menor que a soma dos outros dois. Para isso, consideremos dois lados do triângulo, denotados[3] por a e b respectivamente, onde $a \leq b$. Denotemos o terceiro lado por c. As figuras a seguir abordam os casos $a < b$ e $a = b$ e mostram que $b-a < c < b+a$.

[3]Por abuso de linguagem, as vêzes estaremos confundindo o comprimento do lado de um triângulo com o próprio lado.

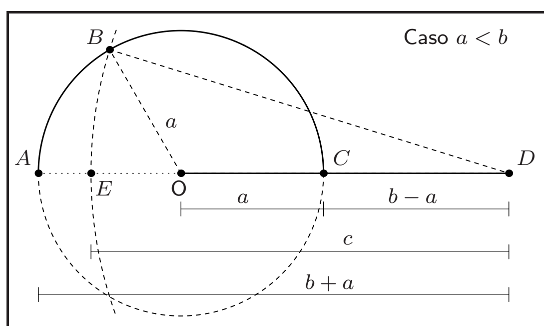


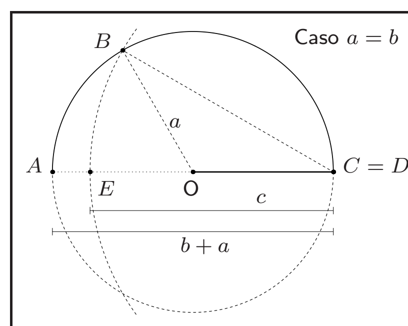


Veja que ao variar o ponto B sobre o semi-círculo superior (sem passar pelos pontos A e C) de raio a obtemos todos os possíveis triângulos com lados de comprimentos a e b respectivamente. Em todos eles, o lado DB é maior que o segmento DC cujo comprimento vale $b - a$ e é menor que o segmento DA que mede $b + a$. Para ver isso, note que o círculo de raio c, centrado em D, passa pelo ponto B e intersecta o segmento CA em um único ponto E. Logo, o comprimento de DE é maior que o de DC e menor que o de DA ou seja, $b - a < c < b + a$.

Reciprocamente, vamos mostrar agora que dados três números reais positivos tais que cada um deles é maior que o módulo da diferença e menor do que a soma dos outros dois então é possível construir um triângulo cujos lados têm como medida esses três números.

Para isso, sejam a e b dois desses números, onde $a \leq b$. Denotemos por c o terceiro número, o qual satisfaz a condição $b - a < c < b + a$. A figura abaixo mostra a construção do triângulo com lados medindo respectivamente a, b, c.





Para entendê-la, considere o ponto E do segmento CA tal que DE mede c. Isso é possível já que $b - a < c < b + a$. O círculo centrado em D e de raio c passa por E e intersecta a parte superior do círculo de raio a num ponto B. O triângulo procurado é o triângulo OBD.

Agora, finalizada a vizualização do resultado proposto, cabe uma pergunta: Dados três números positivos, se um deles é maior que a diferença e menor que a soma dos outros dois, será que os outros dois números também terão essa propriedade? A resposta é sim... e isso é uma consequência do que acabamos de mostrar. Esse resultado afirma que para verificar quando três números reais positivos definem um triângulo tendo esse números como medidas dos seus lados basta verificar se um dos números dados é maior que o módulo da diferença e menor que a soma dos outros dois.

Compare esse resultado com o exercício 36 (proposto) dessa lição e com o exercício resolvido 10 da página 19.

Exercícios

1. Quais das frações a seguir são irredutíveis?

(a) $3/2$ (b) $123/121$
(c) $-1/1542$ (d) $1005/103$

2. Calcule a distância à origem dos seguintes números reais:

(a) 3 (b) $-2{,}1$
(c) -4 (d) 2π
(e) $-\sqrt{3}$ (f) $-4{,}2$
(g) $-\sqrt{5}$ (h) $-\pi$.

3. Sejam $x\,,y\,,z\in\mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

(a) $x<2 \implies x\le 2$;
(b) $x<1 \implies x\le 0{,}9$;
(c) $x<2{,}1 \implies x<2{,}9$;
(d) $x<-2 \implies x<-1{,}9$;
(e) $x<3$ e $3<2y \implies x<2y$;
(f) $1<x$ e $x<y-2 \implies 1<y-2$;
(g) $1\le x$ e $x\le y-2 \implies 0<y-2$;
(h) $3x<\pi$ e $\pi<y-2 \implies 3x<y-3$;
(i) $3\le x$ e $x<2y \implies 3<2y$;
(j) $-5\le 2x$ e $2x\le y \implies -5<y$;
(k) Se $2y-1\le x$, $x\le 3$ e $3\le 2z+1$ então, podemos concluir que $2y-1\le 2z+1$.

4. Calcule:

(a) $|2-\pi|$ (b) $|1{,}1-\sqrt{2}|$
(c) $|\sqrt{3}-2|$ (d) $|-\sqrt{5}+1|$
(e) $|5{,}2-6{,}1|$ (f) $|\frac{1}{3}-\frac{2}{5}|$.

5. Calcule a distância entre os números dados e represente graficamente essa distância.

(a) 2 e $3{,}4$ (b) π e $\sqrt{2}$
(c) -2 e $3{,}4$ (d) $-\pi$ e $-\sqrt{2}$
(e) -2 e $-3{,}4$ (f) $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{3}$.

6. Resolva as seguintes equações:

(a) $|2x-1|=0$ (b) $|4-x^2|=0$
(c) $|3x+7|=0$ (d) $|5x^2+1|=0$
(e) $|\pi-2y|=0$ (f) $|3z+1|=0$.

7. Dê uma equação que descreva os pontos da reta que são iguais ao seu próprio quadrado. Resolva tal equação.

8. Dê uma equação que descreva os pontos da reta cuja distância ao dobro do seu quadrado vale 5.

9. Dê uma equação que descreva os pontos da reta cuja distância a seu cubo ultrapassa a distância ao seu quadrado de exatamente 4 unidades.

10. Resolva as seguintes equações:

(a) $|2x-1|=|x|$
(b) $|4-x^2|=6$
(c) $|3x+7|=|2x-1|$
(d) $|5x^2+1|=|x^2-1|$
(e) $\big||2x+1|-|\pi-x|\big|=0$
(f) $|3z+1|=3|2-z|$
(g) $|2x-1|+|1-3x|=0$.

11. Quais das afirmações a seguir são falsas?

(a) $x\le|x|$ para todo $x\in\mathbb{R}$;
(b) $x\ge-|x|$ para todo $x\in\mathbb{R}$;
(c) $x>x-2$ para todo $x\in\mathbb{R}$;
(d) $x+\pi\le x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

12. Sejam $x\,,y\in\mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

(a) $|x+y|=|x|+|y|$;
(b) $|2x|=2|x|$;
(c) $|2x|=x|2|$;
(d) $|x/3|=|x|/3$;
(e) $|x-y|=|x|-|y|$;
(f) $|x+2|=|x|+2$.

13. Represente graficamente os intervalos a seguir e verifique se os números $2\,,\pi\,,\frac{3}{7}\,,-\sqrt{5}$ pertencem a tais intervalos.

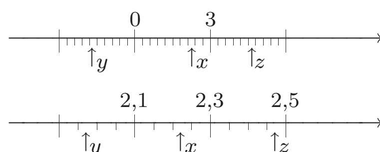
(a) $(-2\,,4)$ (b) $[\,1\,,5\,]$ (c) $[\,-3\,,3)$
(d) $(-\infty\,,2\,]$ (e) $[\,1\,,\infty)$ (f) $(-3\,,\pi)$.

14. Determine os números reais $x\,,y\,,z$ indicados pelas setas dos diagramas a seguir.

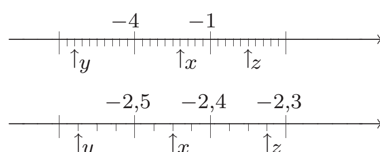
0 1
↑y ↑x ↑z

4,3 4,4 4,5
↑y ↑x ↑z

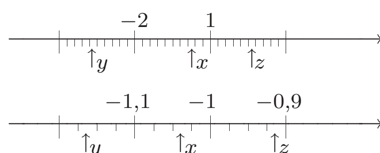
15. Em cada diagrama a seguir, faça estimativas para os números reais x, y, z indicados pelas setas.



16. Determine os números reais x, y, z indicados pelas setas dos diagramas a seguir. Dê a resposta na forma de uma fração irredutível.



17. Em cada diagrama a seguir, faça estimativas para os números reais x, y, z indicados pelas setas. Dê a resposta na forma de frações irredutíveis.



18. Escreva os conjuntos a seguir como uma união de intervalos disjuntos. Faça isso de tal forma que os intervalos tenham o maior comprimento possível.
(a) $(-2, 3) \cap [\sqrt{2}, 4]$;
(b) $[3, 2\pi) - (4, 6]$;
(c) $(-\infty, 3] - [-\pi, 0)$;
(d) $(1, 4) \cup (2, 5]$;
(e) $(2, \sqrt{5}] - \{2, 3, \sqrt{5}\}$;
(f) $\{(-2, 3) \cup (5, 8]\} \cap [2, 6]$;
(g) $(2, \infty) - \{1, 3, \pi, \sqrt{17}\}$.

19. Sejam I e J intervalos da reta. Pergunta-se: $I \cup J$; $I \cap J$; $I - J$ são intervalos da reta?

20. Sejam I e J intervalos da reta. Pergunta-se: sob que condições podemos garantir que $I \cup J$ é um intervalo da reta? Faça figuras para tentar formular uma resposta.

21. Responda a pergunta do exercício anterior para $I \cap J$ e também para $I - J$.

22. Esboce os conjuntos:
(a) $[0, 1] \times [0, 1]$;
(b) $(0, 1) \times (0, 1)$;
(c) $[0, 1) \times [0, 1)$;
(d) $[0, 1) \times (0, 1]$.

23. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Esboce os conjuntos:
(1) $[a, b] \times \{1\}$;
(2) $(a, b) \times \{1\}$;
(3) $[a, b) \times \{1\}$;
(4) $[a, b) \times \{1\}$.

24. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Esboce os conjuntos:
(1) $\{1\} \times [a, b]$;
(2) $\{1\} \times (a, b)$;
(3) $\{1\} \times [a, b)$;
(4) $\{1\} \times (a, b]$.

25. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Esboce os conjuntos:
(1) $[a, b] \times [a, b]$;
(2) $(a, b) \times (a, b)$;
(3) $[a, b) \times [a, b)$;
(4) $[a, b) \times (a, b]$;
(5) $\{c\} \times (a, b]$;
(6) $[a, b) \times \{c\}$;

26. Determine os pontos da reta cuja distância ao ponto 2 é o triplo da distância ao ponto 8.

27. Seja k um número real positivo. Dê uma equação que descreva o conjunto dos pontos da reta cuja distância ao ponto 2 é k vêzes sua distância ao ponto 8. Resolva tal equação.

28. Dê uma equação que descreva os pontos da reta eqüidistantes dos pontos 1 e π. Resolva tal equação.

29. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Dê uma equação que descreva os pontos da reta que estão a uma mesma distância de a e de b, isto é, os pontos eqüidistantes de a e de b. Mostre que tal equação tem uma única solução. Tal solução é o ponto médio do intervalo $[a, b]$.

30. Dê uma equação que descreva os pontos da reta cuja distância do seu quadrado a unidade, vale 5. Resolva essa equação.

31. Determine os pontos da reta cujo cubo de sua distância a origem vale 8.

32. Dê uma equação que descreva os pontos da reta cuja distância ao seu quadrado é igual a sua distância a π.

33. Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cuja distância a 2 é menor que $\sqrt{3}$.

34. Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cuja distância a π é menor que o dobro de sua distância a 5.

35. Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cuja distância a $\sqrt{2}$ é maior ou igual ao quadrado de sua distância a 5.

36. Sejam a, b, c números reais positivos. Suponha que um desses números é menor que a soma e maior que o módulo da diferença dos outros dois. Mostre que os outros dois números também têm essa propriedade.

37. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras:

(1) $a < b \quad \Rightarrow \quad a \leq b$;
(2) $a \leq b \quad \Rightarrow \quad a < b$.

38. A afirmação a seguir é verdadeira?

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ apenas uma das três alternativas acontecem: $a = b$, $a \leq b$, $a \geq b$.

39. A afirmação a seguir é verdadeira?

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, ocorre uma e apenas uma das duas alternativas: $a \leq b$, $a > b$.

40. Qual é a negação de "$>$", de "$\leq$" e de "$\geq$"?

41. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $|x| = b$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

42. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $|x| = b^2$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

43. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $|x| = |b|+1$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

44. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $|bx| = 1$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

45. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $|bx| = b$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

46. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Pergunta-se: a fração $\frac{n}{n+1}$ é irredutível?

47. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Sabendo que m/n é irredutível podemos concluir que n/m também é irredutível?

48. Sejam a, b, c números reais. Resolva a equação $|ax+b| = |c|$. Diga quantas soluções tal equação possui.

49. Dado $a \in \mathbb{R}$ pergunta-se: os conjuntos $\{a, -a\}$ e $\{a, -a, |a|, -|a|\}$ são iguais ou distintos?

3

Operações

Iniciamos essa lição relembrando duas operações elementares sobre o conjunto dos números reais. São elas:

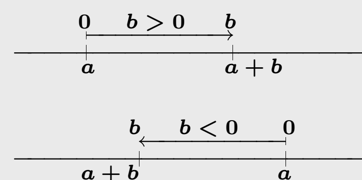
Adição: $a + b$	**Multiplicação:** $a \times b$ ou ab ou $a \cdot b$

cujas notações usuais estão acima indicadas. Na próxima lição vamos relembrar as propriedades dessas operações. Agora, vamos nos ocupar da interpretação geométrica da soma e iniciar o estudo de simetrias.

Tem-se uma maneira bastante geométrica de interpretar a soma de dois números reais a, b quaisquer, a saber:

$a + b$ *é obtido transladando* a *de* b.

Representação geométrica da adição:



Tal translação

☞ será à *direita* quando b for *positivo*,

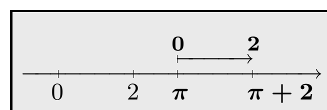
☞ será à *esquerda* quando b for *negativo*,

☞ será dita *translação nula* quando $b = 0$.

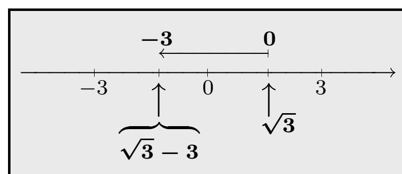
A representação geométrica da multiplicação será vista mais tarde.

Exemplos

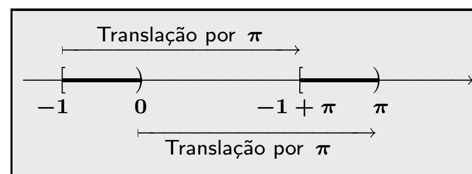
❄ Geometricamente, o número real $\pi + 2$ é obtido transladando π de 2.



❄ Geometricamente, $\sqrt{3}-3=\sqrt{3}+(-3)$ é obtido transladando $\sqrt{3}$ de -3.



❄ O intervalo $[-1+\pi\,,\pi)$ é obtido transladando o intervalo $[-1\,,0)$ de π.



Sabemos, por exemplo, que $-\frac{1}{2}\in[-1\,,0)$. Consequentemente, $-\frac{1}{2}+\pi\in[-1+\pi\,,\pi)$.
Os pontos do intervalo $[-1+\pi\,,\pi)$ são obtidos transladando os pontos do intervalo $[-1\,,0)$ de π.

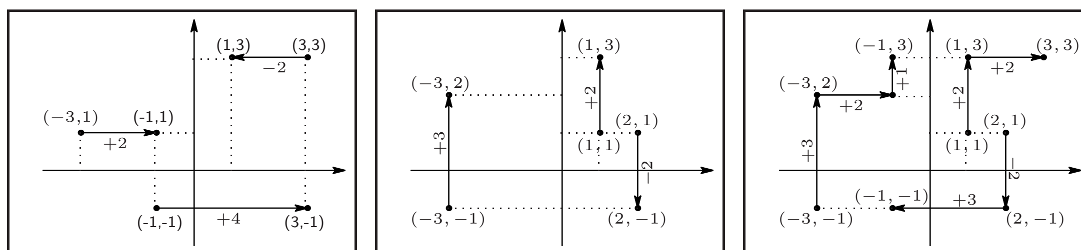
Dado um conjunto $A\subset\mathbb{R}$ chamamos de *transladado de* A *por* $b\in\mathbb{R}$ ao conjunto obtido transladando-se de b todos os elementos de A.

Também podemos levar ao plano cartesiano esses conceitos:

☞ $(a+\lambda\,,b)$ é obtido transladando-se a primeira coordenada de $(a\,,b)$ de λ;
também dizemos que
$(a+\lambda\,,b)$ é obtido *transladando-se horizontalmente* $(a\,,b)$ de λ;

☞ $(a\,,b+\lambda)$ é obtido transladando-se a segunda coordenada de $(a\,,b)$ de λ;
também dizemos que
$(a\,,b+\lambda)$ é obtido *transladando-se verticalmente* $(a\,,b)$ de λ.

Nos quadros a seguir mostramos os transladados de alguns pares ordenados.



- No primeiro quadro temos:
  - $(3\,,-1)$ é obtido transladando-se horizontalmente $(-1\,,-1)$ de $+4$;
  - $(-1\,,1)$ é obtido transladando-se horizontalmente $(-3\,,1)$ de $+2$;
  - $(1\,,3)$ é obtido transladando-se horizontalmente $(3\,,3)$ de -2.
- No segundo quadro:

– $(-3\,,2)$ é obtido transladando-se verticalmente $(-3\,,-1)$ de $+3$;

– $(1\,,3)$ é obtido transladando-se verticalmente $(1\,,1)$ de $+2$;

– $(2\,,-1)$ é obtido transladando-se verticalmente $(2\,,1)$ de -2.

- No terceiro quadro fazemos translações verticais, seguidas de translações horizontais.

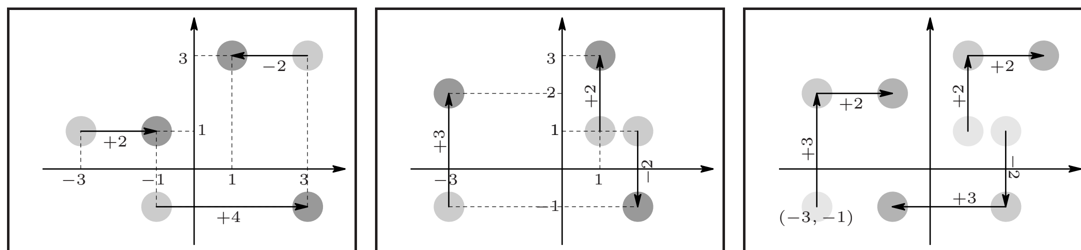
Dados $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$ e $a\,,b \in \mathbb{R}$ temos que: $(x+a\,,y+b)$ é obtido de $(x\,,y)$ por uma translação vertical de b seguida de uma translação horizontal de a; ou então, $(x+a\,,y+b)$ é obtido de $(x\,,y)$ por uma translação horizontal de a seguida de uma translação vertical de b. Isso é mostrado nas figuras a seguir.



Repare que nas figuras acima os parâmetros a e b são tomados positivos.

Se podemos transladar pontos do plano cartesiano, também podemos transladar subconjuntos, como fizemos na reta. Transladar $A \subset \mathbb{R}^2$ horizontalmente de $a \in \mathbb{R}$ significa transladar horizontalmente de a todos os pontos do conjunto A. Analogamente, transladar A verticalmente de b significa transladar verticalmente de b todos os elementos de A.

Nas figuras a seguir transladamos alguns conjuntos horizontalmente e verticalmente.



As bolas mais escuras foram obtidas transladando as bolas mais claras. No primeiro quadro temos translações horizontais e no segundo exibimos translações verticais. No terceiro quadro repetimos as translações verticais do segundo e fazemos, em seguida, translações horizontais.

1 Simetrias

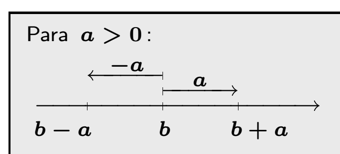
Vamos agora desenvolver o conceito de simetria numa de suas formas mais elementares e geométrica.

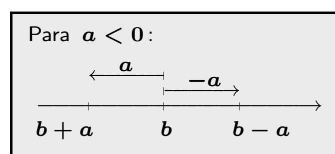
1.1 Simetria na reta

Na seção 3 da Lição 2 falamos em eqüidistância e em simetria de pontos em relação a origem da reta orientada: dissemos que a e $-a$ estão eqüidistantes da origem, dissemos que eles são simétricos em relação a essa origem.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ dizemos que $b - a$ e $b + a$ são *simétricos em relação a* b e que b é o *centro de simetria*. Em resumo, dizemos que $b \pm a$ são simétricos em relação a b. Dizemos também que $b-a$ (resp. $b+a$) é o simétrico de $b+a$ (resp. $b-a$) em relação a b. Também dizemos que $b - a$ (resp. $b + a$) é o *refletido* de $b + a$ (resp. $b - a$) em relação a b.

Pela definição acima, os simétricos em relação a um centro de simetria b são obtidos transladando b de um mesmo valor à direita e à esquerda. Assim, todo ponto à direita de b tem um único simétrico (em relação a b) à esquerda de b. Analogamente, todo ponto à esquerda de b tem um único simétrico (em relação a b) à direita de b.

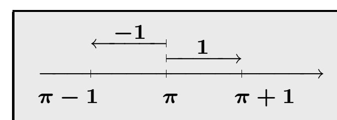




Também segue da definição acima que dois pontos que são simétricos em relação a b estão *eqüidistantes* de b, isto é, a uma mesma distância de b. Essa distância vale, como visto, $|(b + a) - b| = |a| = |(b - a) - b|$.

Exemplos

❄ Os pontos $\pi - 1$ e $\pi + 1$ são simétricos em relação a π. O número π é o centro de simetria. A distância de $\pi - 1$ e de $\pi + 1$ ao centro de simetria π vale 1. Além disso, transladando o intervalo $[\pi - 1, \pi]$ de 1 obtemos o intervalo $[\pi, \pi + 1]$.



Dado um centro de simetria b e um ponto c da reta, podemos determinar o simétrico (ou refletido) de c em relação a b. Dados um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $b \in \mathbb{R}$ o subconjunto da reta formado pelos simétricos (ou refletidos) em relação a b de todos os pontos de A é o *simétrico* ou *refletido* de A em relação a b.

Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ tem *simetria em relação a* b quando A possui a seguinte propriedade: o simétrico de todo elemento de A também pertence ao conjunto A. No exemplo acima, o intervalo $[\pi - 1, \pi + 1]$ é simétrico em relação a π. O conjunto $[-2, 1) \cup (1, 4]$ é simétrico em relação a 1.

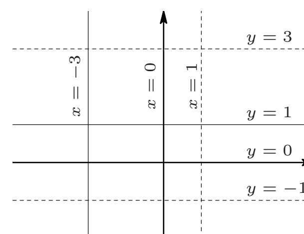
1.2 Simetria no plano cartesiano

No plano cartesiano, vamos construir simetrias através de translações horizontais e verticais.

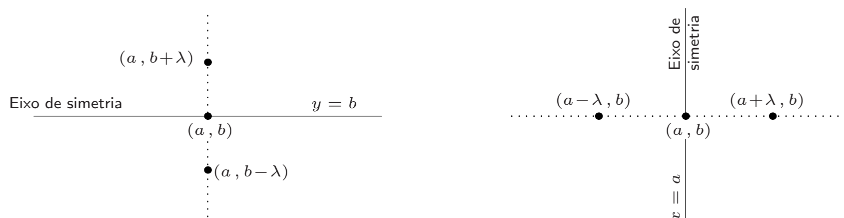
Para isso, primeiramente observe que o conjuntos de todos os pontos do plano cartesiano cuja abcissa vale a é a reta vertical que passa por $(a, 0)$. Dizemos que $x = a$ é a sua equação cartesiana.

Por sua vez, o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano cuja ordenada vale b constitui uma reta horizontal: é a reta horizontal que passa pelo ponto $(0, b)$. Dizemos que $y = b$ é a sua equação cartesiana.

Na figura ao lado mostramos algumas dessas retas.



Dados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ dizemos que $(a + \lambda, b)$ e $(a - \lambda, b)$ são *simétricos em relação à reta vertical* de equação $x = a$ a qual é chamada de *eixo de simetria*. Dizemos que $(a, b - \lambda)$ e $(a, b + \lambda)$ são *simétricos em relação à reta horizontal* de equação $y = b$ que é o eixo de simetria. Exibimos essas simetrias nas figuras abaixo.

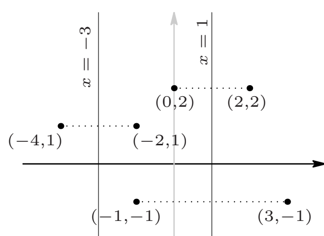


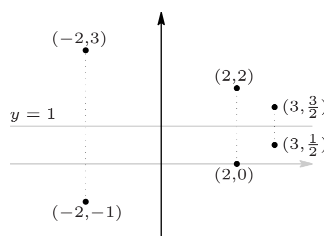
Também dizemos que $(a + \lambda, b)$ (resp. $(a - \lambda, b)$) é o *refletido* de $(a - \lambda, b)$ (resp. $(a + \lambda, b)$) em relação ao eixo vertical de equação $x = a$. De forma análoga, dizemos que $(a, b + \lambda)$ (resp. $(a, b - \lambda)$) é o *refletido* de $(a, b - \lambda)$ (resp. $(a, b + \lambda)$) em relação ao eixo horizontal de equação $y = b$.

Repare que na primeira figura os pontos têm a mesma abcissa. Assim, a simetria é determinada pela simetria nas segundas coordenadas dos pontos. Note que $b + \lambda$ e $b - \lambda$ são simétricos em relação a b.

Na segunda figura, os pontos possuem as mesma ordenadas. Conseqüentemente, a simetria é definida pela simetria nas primeiras coordenadas. Note que $a + \lambda$ e $a - \lambda$ são simétricos em relação a a.

Nas próximas duas figuras mostramos exemplos de simetrias em relação a eixos verticais e a eixos horizontais.





Na figura da esquerda temos:

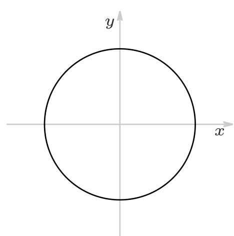
- $(-4\,,1)$ e $(-2\,,1)$ são simétricos em relação a reta vertical de equação $x=-3$;
- $(-1\,,-1)$ e $(3\,,-1)$ são simétricos em relação a reta vertical de equação $x=1$;
- idem para os pontos $(0\,,2)$ e $(2\,,2)$.

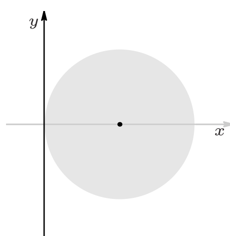
Na figura da direita temos:

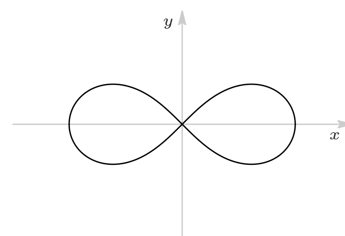
- $(-2\,,-1)$ e $(-2\,,3)$ são simétricos em relação a reta horizontal de equação $y=1$;
- o mesmo ocorre com os pares de pontos $(2\,,0)$; $(2\,,2)$ e $(3\,,1/2)$; $(3\,,3/2)$.

Da mesma forma como falamos em pontos simétricos em relação a um eixo horizontal ou vertical podemos falar em subconjuntos do plano cartesiano com essas simetrias. Dizemos que $A\subset\mathbb{R}^2$ tem *simetria em relação ao eixo vertical de equação* $x=a$ quando todos os pontos de A tem essa propriedade. Analogamente, dizemos que $A\subset\mathbb{R}^2$ tem *simetria em relação ao eixo horizontal de equação* $y=b$ quando todos os pontos de A tem essa propriedade.

Nas figuras a seguir mostramos subconjuntos do plano simétricos em relação a eixos horizontais e a eixos verticais.







Na primeira figura temos um círculo centrado na origem do plano cartesiano[1] e de raio 1. Tal círculo tem simetria tanto em relação ao eixo das abcissas, quanto em relação ao eixo das ordenadas.

Na segunda figura temos a região do plano delimitada pelo círculo de raio unitário centrado no ponto $(1\,,0)$. Esse conjunto tem simetria em relação ao eixo das abcissas mas não tem simetria em relação ao eixo das ordenadas.

[1]A equação cartesiana desse círculo é: $x^2+y^2=1$.

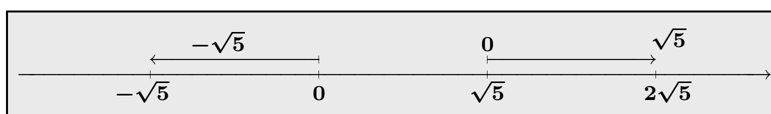
Na terceira figura temos a famosa curva chamada de *figura oito*[2]. Ela tem simetria tanto em relação ao eixo das abcissas, quanto em relação ao eixo das ordenadas.

Aliás, dada uma curva através de sua equação cartesiana, como saber se ela tem simetria em relação a eixos horizontais ou verticais ? Veremos isso mais tarde quando falarmos em gráfico de expressões.

Exercícios resolvidos

1. **Conhecendo na reta orientada as localizações da origem e de $\sqrt{5}$ faça as representações gráficas de $-\sqrt{5}$ e de $2\sqrt{5}$.**

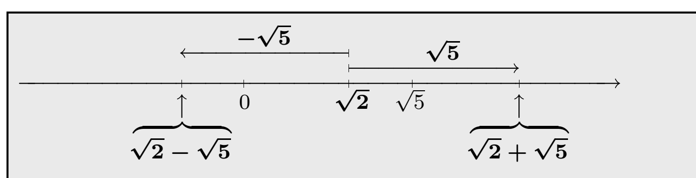
Solução Sabemos que $-\sqrt{5}$ é o simétrico de $\sqrt{5}$ em relação a origem. Com um compasso, medimos a distância de 0 a $\sqrt{5}$.



Com o compasso fixo em 0 marcamos $-\sqrt{5}$ à esquerda de 0. Agora, fixando o compasso em $\sqrt{5}$ transladamos $\sqrt{5}$ de $\sqrt{5}$, obtendo $2\sqrt{5}$.

2. **Conhecendo na reta orientada as localizações da origem, de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$, faça as representações gráficas de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ e de $\sqrt{2}-\sqrt{5}$.**

Solução Com um compasso, medimos a distância de 0 a $\sqrt{5}$. Agora, com o compasso fixo em $\sqrt{2}$, transladamos $\sqrt{2}$ de $\sqrt{5}$ e de $-\sqrt{5}$ obtendo, respectivamente, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}-\sqrt{5}$.



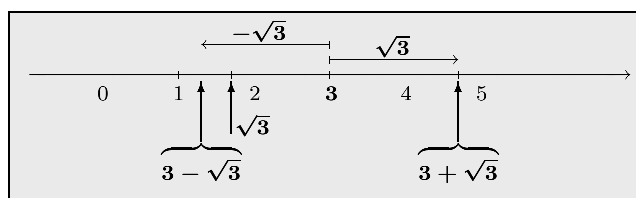
3. **Conhecidas as localizações da origem, de 3 e de $\sqrt{3}$, dê as localizações dos números reais cuja distância ao número 3 vale $\sqrt{3}$.**

Solução Tais números são obtidos[3] transladando 3 de $\sqrt{3}$ e de $-\sqrt{3}$, respectivamente, no que obtemos os números $3+\sqrt{3}$ e $3-\sqrt{3}$. Suas localizações na reta podem ser obtidas da seguinte forma. Com um compasso medimos a distância da origem a $\sqrt{3}$. Com o compasso centrado em 3 marcamos $3+\sqrt{3}$ à direita de 3 e $3-\sqrt{3}$ à esquerda de 3.

Graficamente, temos:

[2] A equação cartesiana dessa curva é: $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$.

[3] Também podemos obtê-los resolvendo a equação $|x-3| = \sqrt{3}$ como aprendemos na lição anterior.

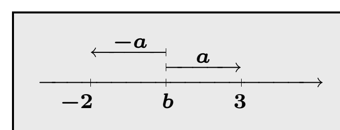


Dizemos que $3-\sqrt{3}$ e $3+\sqrt{3}$ são *simétricos em relação* à 3 e que 3 é o *centro de simetria*.

4. Determine b de tal forma que -2 e 3 sejam simétricos em relação a b.

Solução Podemos abordar esse problema da seguinte maneira[4].

Os transladados de b por $\pm a$ valem $b \pm a$. Assim, devemos ter: $b+a=-2$ e $b-a=3$. Somando, obtemos:

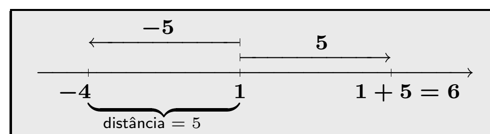


$$(b+a)+(b-a)=1 \iff 2b=1 \iff b=1/2\,.$$

Isso mostra que -2 e 3 são simétricos em relação a $1/2$.

5. Determine o simétrico de -4 em relação ao ponto 1.

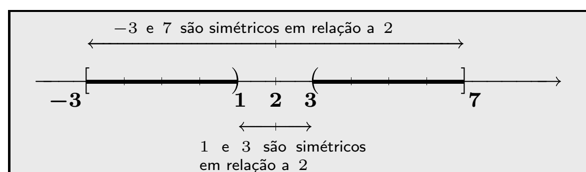
Solução O simétrico procurado é obtido transladando-se o ponto 1 (que é o centro de simetria) de $|1-(-4)|=5$ (que é a distância de -4 à 1). Assim, o ponto procurado é o ponto $1+5=6$.



6. Determine o simétrico[5] do intervalo $[-3\,,1)$ em relação a 2.

Solução Para isso basta determinar os simétricos em relação a 2 das extremidades do intervalo.
Temos que:

- o simétrico em relação a 2 da extremidade 1 é: $2+|2-1|=3$;
- o simétrico em relação a 2 da extremidade -3 é: $2+|2-(-3)|=7$.

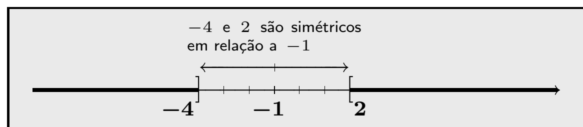


Logo, os simétricos em relação a 2 dos pontos compreendidos entre -3 e 1 são os pontos compreendidos entre 3 e 7. Assim, o intervalo procurado é o intervalo $(3\,,7]$.

[4] Outra forma de abordar o problema é a seguinte: o ponto b é o ponto médio do segmento de reta de -2 à 3, cujo comprimento vale $3-(-2)=5$. Sendo assim, o ponto b é obtido transladando -2 da metade do comprimento desse segmento de reta, isto é: $b=-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.
Outra alternativa: o ponto b está eqüidistante de -2 e 3. Logo, ele é solução da equação $|b-(-2)|=|b-3|$. Resolvendo tal equação determinamos o valor de b.

[5] O *simétrico em relação a* b, de um subconjunto A da reta, é constituído pelos simétricos em relação a b de todos os pontos de A.

7. Determine o simétrico de $[\,2\,,\infty)$ em relação a -1.

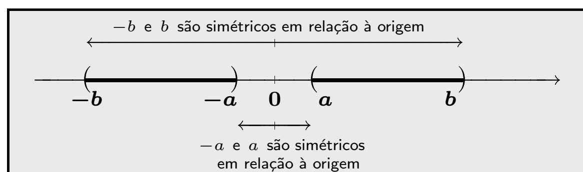


Solução Nesse caso, basta determinar o simétrico em relação a -1 da extremidade 2. Tal simétrico vale:

$$-1-|2-(-1)| = -1-3 = -4\,.$$

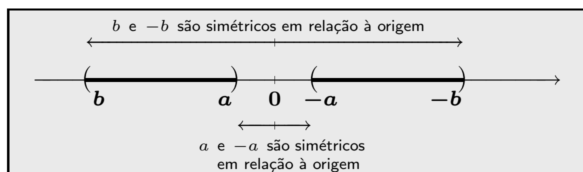
Consequentemente, o simétrico em relação a -1 do intervalo $[\,2\,,\infty)$ é o intervalo $(-\infty\,,-4\,]$.

8. Sejam $a\,,b\in\mathbb{R}$ tais que $b>a\geq 0$. Mostre que o simétrico do intervalo $(\,a\,,b\,)$ em relação à origem é o intervalo $(-b\,,-a\,)$.



Solução Por definição o conjunto procurado é formado pelos pontos que são os simétricos em relação a origem dos pontos do intervalo aberto $(\,a\,,b\,)$. Consequentemente, são os pontos compreendidos entre os simétricos de a e de b, ou seja, é o intervalo $(-b\,,-a\,)$.

☛ **Nota:** Sabemos que o simétrico de c é $-c$ e que o simétrico de $-c$ é c. Assim, o exercício anterior mostrou também que o simétrico do intervalo $(-b\,,-a)$ em relação a origem é o intervalo $(\,a\,,b\,)$. Ou seja, acabamos de mostrar, também, que: Sejam $a\,,b\in\mathbb{R}$ tais que $b<a\leq 0$. O simétrico do intervalo $(\,b\,,a\,)$ é o intervalo $(-a\,,-b)$.



De posse desses dois resultados fica fácil mostrar que:

Dados $a\,,b\in\mathbb{R}$ tais que $a<b$ então os simétricos dos intervalos $(\,a\,,b\,)$, $[\,a\,,b\,]$, $[\,a\,,b\,)$, $(\,a\,,b\,]$ em relação a origem são os intervalos $(-b\,,-a)$, $[-b\,,-a\,]$, $(-b\,,-a\,]$, $[-b\,,-a\,)$.

9. Qual é o número real que transladado de 2,3 produz o número $-4{,}71$?

Solução Denotemos por x o número a ser determinado. Transladando x de $2{,}3$ obtemos: $x+2{,}3$. Consequentemente: $x+2{,}3=-4{,}71 \iff x=-2{,}3-4{,}71 \iff x=-7{,}01$.

10. Qual é o número real que transladado de seu triplo produz o número $\sqrt[3]{4}$?

Solução Seja x o número a ser determinado. Nesse caso, temos: transladando x de $3x$ obtemos $\sqrt[3]{4}$. Consequentemente,

$$x+3x=\sqrt[3]{4} \iff 4x=\sqrt[3]{4} \iff x=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\,.$$

11. Determine o número real que possui a seguinte propriedade: transladando esse número de 3 obtemos o dobro do seu transladado por 5 .

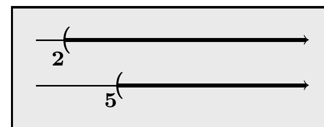
Solução Seja x o número a ser determinado.
Temos que:

- O translado de x por 3 vale: $x+3$;
- O dobro do transladado de x por 5 vale: $2(x+5)$.

Assim, resulta que

$$x+3=2(x+5) \iff x+3=2x+10 \iff -7=x \iff x=-7.$$

12. Qual intervalo obtemos quando transladamos[6] o intervalo $(2,\infty)$ de 3 ?



Solução Transladando os pontos do intervalo $(2,\infty)$ de 3 obtemos os pontos da reta que estão à direita de $2+3$, isto é, obtemos o intervalo $(5,\infty)$.

13. Seja x um ponto de um dos conjuntos

(a) $[2,4)$ **(b) $(-5,2)$**

Pergunta-se: em qual subconjunto da reta estará o transladado de x por -5 ? Determine o menor subconjunto possível.

Solução Transladando de -5 os subconjuntos acima, obtemos : $[-3,-1)$ e $(-10,-3)$. Assim,
(a) se $x\in[2,4)$ então $x-5\in[-3,-1)$; **(b)** se $x\in(-5,2)$ então $x-5\in(-10,-3)$.

14. Se x não pertence a $[2,\pi)$ a qual conjunto deverá pertencer o transladado de x por 3 ? Determine o menor[7] subconjunto possível.

Solução Se $x\notin[2,\pi)$ então o transladado de x por 3 não vai pertencer ao transladado de $[2,\pi)$ por 3 . Isso significa que $x+3\notin[2+3,\pi+3)=[5,\pi+3)$ ou seja, $x+3\in(-\infty,5)\cup[\pi+3,\infty)$.

15. O transladado de um número real por $\sqrt{2}$ pertence ao intervalo $[3,\pi]$. Determine o menor subconjunto da reta ao qual esse número deve pertencer.

Solução Seja x tal número. Sabemos que o transladado de x por $\sqrt{2}$ pertence ao intervalo $[3,\pi]$, isto é, $x+\sqrt{2}\in[3,\pi]$. Consequentemente, $\big(x+\sqrt{2}\big)-\sqrt{2}\in\big[3-\sqrt{2},\pi-\sqrt{2}\big]$, ou seja, $x\in\big[3-\sqrt{2},\pi-\sqrt{2}\big]$. Logo, o intervalo procurado é o intervalo $\big[3-\sqrt{2},\pi-\sqrt{2}\big]$.

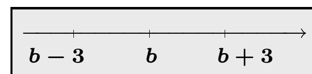
[6] O transladado de um subconjunto A da reta por um número real b é obtido transladando-se todos os pontos do subconjunto A por b.

[7] Menor em que sentido? Você pode precisar esse termo *menor* ?

16. Seja $b \in \mathbb{R}$. Quais são os pontos da reta cuja distância ao ponto b vale 3? Dê uma solução geométrica e apresente uma equação que descreva tais pontos.

Solução Já vimos que os pontos cuja distância ao ponto b vale 3 são obtidos transladando[8] b de 3 e de -3. Ou seja, são os pontos $x = b \pm 3$.

A distância de um ponto x à b é dada por $|x-b|$. Se tal distância vale 3, devemos ter $|x-b| = 3$. Assim, a equação $|x-b| = 3$ descreve exatamente os pontos da reta cuja distância à b vale 3.



☛ **Nota:** Esse exercício mostra como entender e resolver geometricamente a equação $|x-b| = 3$. Aliás, ele nos ensina a entender e resolver geometricamente a equação $|x-b| = a$ quando $a \geq 0$. Quando $a < 0$ a equação $|x-b| = a$ não tem soluções pois $|x-b|$ nunca é negativo.

Quando $\boldsymbol{a \geq 0}$ temos:

$$|x-b| = a \iff x-b = \pm a$$

$b-a$ b $b+a$

17. Use o exercício anterior para resolver as equações:

(a) $|x-2| = 5$ **(b)** $\left|\dfrac{x}{3} - 1\right| = 1$ **(c)** $\left|\dfrac{1-2x}{3}\right| = 2$ **(d)** $|x-2| = -1$.

Solução Do exercício anterior segue que:

(a) $|x-2| = 5 \iff x-2 = \pm 5 \iff x = 2 \pm 5 \iff x = 7$ ou $x = -3$.

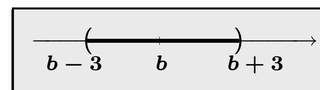
(b) $\left|\dfrac{x}{3} - 1\right| = 1 \iff \dfrac{x}{3} - 1 = \pm 1 \iff \dfrac{x}{3} = 1 \pm 1 \iff x = 3 \pm 3$
$\iff x = 6$ ou $x = 0$.

(c) $\left|\dfrac{1-2x}{3}\right| = 2 \iff \dfrac{1-2x}{3} = \pm 2 \iff 1-2x = \pm 6 \iff 2x = 1 \mp 6$
$\iff 2x = 7$ ou $2x = -5 \iff x = 7/2$ ou $x = -5/2$.

(d) Essa equação não tem solução pois $|x-2| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. Seja $b \in \mathbb{R}$. Quais são os pontos da reta cuja distância ao ponto b é menor do que 3? Dê uma solução geométrica e apresente uma inequação que descreva tais pontos.

Solução Vimos que os pontos da reta cuja distância ao ponto b vale 3 são os pontos $b+3$ e $b-3$. Os pontos cuja distância à b é menor do que 3 são os pontos compreendidos entre $b-3$ e $b+3$, isto é, são os pontos do intervalo $(b-3\,,b+3)$.



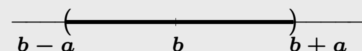
A inequação $|x-b| < 3$ descreve os pontos da reta cuja distância ao ponto b é menor do que 3.

[8]Vimos na lição anterior quais são as soluções da equação $|x-b| = 3$. O objetivo desse exercício é apresentar uma maneira geométrica de resolver tal equação.

☛ **Nota:** Como no exercício anterior, esse exercício mostra como entender e resolver geometricamente a inequação $|x-b|<3$. De fato, ele nos ensina a entender e resolver geometricamente a inequação $|x-b|<a$ quando $a>0$. Novamente, quando $a\leq 0$ a inequação $|x-b|<a$ não tem soluções pois $|x-b|$ nunca é negativo.

Quando $\boldsymbol{a>0}$ temos:

$$|x-b|<a \iff x\in(b-a\,,b+a)$$



Note também que combinando os exercícios 18 e 16 que acabamos de resolver, obtemos:

$$|x-b|\leq a \iff x\in[\,b-a\,,b+a\,]$$

onde $a\geq 0$.

19. **Use o exercício anterior para resolver as inequações:**
(a) $|x-2|<4$ **(b)** $|x+1|\leq 2$ **(c)** $|\pi-x|<4$

Solução Do exercício anterior podemos garantir que:

(a) $|x-2|<4 \iff x\in(\,2-4\,,2+4\,) \iff x\in(-2\,,6\,)$.
(b) $|x+1|\leq 2 \iff |x-(-1)|\leq 2 \iff x\in[-1-2\,,-1+2\,] \iff x\in[-3\,,1\,]$.
(c) $|\pi-x|<4 \iff |x-\pi|<4 \iff x\in(\,\pi-4\,,\pi+4\,)$.

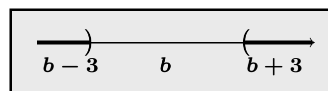
20. **Sabendo que $|2-3x|\leq 5$ faça uma estimativa para $3x$.**

Solução Temos que:

$|2-3x|<5 \iff |3x-2|<5 \iff 3x\in(\,2-5\,,2+5) \iff -3<3x<7$.

21. **Seja $b\in\mathbb{R}$. Quais são os pontos da reta cuja distância ao ponto b é maior do que 3 ? Dê uma solução geométrica e apresente uma inequação que descreva tais pontos.**

Solução Os pontos cuja distância ao ponto b vale 3 são os pontos $b+3$ e $b-3$. Os pontos cuja distância à b é maior do que 3 são os pontos que estão fora do intervalo $[\,b-3\,,b+3\,]$, isto é, são os pontos do conjunto $(-\infty\,,b-3)\cup(b+3\,,\infty)$ mostrado na figura ao lado.

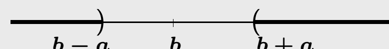


A inequação $|x-b|>3$ descreve os pontos da reta cuja distância ao ponto b é maior do que 3.

☛ **Nota:** Como no exercício anterior, mostramos aqui como entender e resolver geometricamente a inequação $|x-b|>3$. De fato, mostramos como entender e resolver geometricamente a inequação $|x-b|>a$. Repare que quando $a<0$, todo ponto da reta é solução da inequação $|x-b|>a$.

Quando $\boldsymbol{a\geq 0}$ temos:

$$|x-b|>a \iff x\in(-\infty\,,b-a)\cup(b+a\,,\infty)$$



Note também que combinando os exercícios 21 e 16 dessa lição, obtemos:

$$|x-b| \geq a \iff x \in (-\infty\,, b-a\,] \cup [\,b+a\,, \infty)$$

quando $a \geq 0$.

22. **Use o exercício anterior para resolver as inequações:**
(a) $|x-1| > 3$ **(b)** $|x+2| \geq 1$ **(c)** $|3-x| > 2$

Solução Do exercício anterior podemos garantir que:

(a) $|x-1|>3 \iff x \in (-\infty, 1-3\,) \cup (\,1+3\,, \infty) \iff x \in (-\infty, -2\,) \cup (\,4\,, \infty)\,.$

(b) $|x+2| \geq 1 \iff |x-(-2)| \geq 1 \iff x \in (-\infty, -2-1\,] \cup [-2+1\,, \infty)$
$\iff x \in (-\infty, -3\,] \cup [-1\,, \infty).$

(c) $|3-x| > 2 \iff |x-3| > 2 \iff x \in (-\infty\,, 3-2\,) \cup (\,3+2\,, \infty)$
$\iff x \in (-\infty\,, 1\,) \cup (\,5\,, \infty).$

23. **Faça uma estimativa para b sabendo que ele é negativo e que $|1-2b| \geq 3$.**

Solução Temos que:

$|1-2b| \geq 3 \iff |2b-1| \geq 3 \iff 2b \in (-\infty\,, 1-3\,] \cup [\,1+3\,, \infty)$
$\iff 2b \in (-\infty\,, -2\,] \cup [\,4\,, \infty)\,.$

Como $b<0$ concluímos que $2b \leq -2$, ou seja, $b \leq -1$.

24. **Sabendo que $b \in [\,1\,, 3\,)$ determine:**
(1) O menor intervalo que contém $b+2$ **(2) O menor intervalo que contém $3-b$.**

Solução Tomemos $b \in [\,1\,, 3\,)$.

(1) Como $b \in [\,1\,, 3\,)$, o seu transladado por 2 pertence ao transladado de $[\,1\,, 3\,)$ por 2. Portanto, $b+2 \in [\,1+2\,, 3+2\,) = [\,3\,, 5\,)$. Assim, o intervalo procurado é o intervalo $[\,3\,, 5\,)$.

(2) De $b \in [\,1\,, 3\,)$ segue que $-b$ pertence ao simétrico do intervalo $[\,1\,, 3\,)$ em relação à origem, que é o intervalo $(-3\,, -1\,]$. Assim, $-b \in (-3\,, -1\,]$ e, consequentemente, $3-b \in (-3+3\,, -1+3\,] = (\,0\,, 2\,]$. Assim, o intervalo procurado é o intervalo $(\,0\,, 2\,]$.

25. **Sabendo que $b \in (-\infty\,, 1\,]$ determine o menor intervalo que contém $2-b$.**

Solução De $b \in (-\infty\,, 1\,]$ segue que $-b$ pertence ao simétrico do intervalo $(-\infty\,, 1\,]$ em relação a origem, que é o intervalo $[-1\,, \infty)$. Assim, $-b \in [-1\,, \infty)$ e, consequentemente, $-b+3 \in [-1+3\,, \infty)$. Portanto, o intervalo procurado é o intervalo $[\,2\,, \infty)$.

26. **Dê uma equação que descreva os pontos da reta cujo quadrado de seu transladado por 2 vale 5. Resolva tal equação.**

Solução Seja z um tal ponto. O seu transladado por 2 vale $z+2$. O quadrado desse transladado vale 5, ou seja, $(z+2)^2 = 5$. Logo, os números procurados são aqueles que satisfazem a equação $(z+2)^2 = 5$.

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$(z+2)^2 = 5 \iff z+2 = \pm\sqrt{5} \iff z = -2 \pm \sqrt{5}.$$

27. **Dê uma equação que descreva os pontos da reta cujo quadrado dista 5 unidades do seu transladado por 6.**

Solução Seja z um tal ponto. A distância do seu quadrado z^2 ao seu transladado $z+6$ vale 5. Isso significa que $|z^2-(z+6)| = 5$. Assim, os pontos em questão são os pontos descritos pela equação $|z^2-(z+6)| = 5$, ou seja, $|z^2-z-6| = 5$.

28. **Em cada um dos itens a seguir são dados dois pontos do plano cartesiano. Determine em cada caso o eixo de simetria.**

(a) $(-1\,,0)$ e $(-1\,,2)$ **(b)** $(\sqrt{2}\,,-2)$ e $(\sqrt{2}\,,1)$
(c) $(-1\,,1)$ e $(3\,,1)$ **(d)** $(-1-\sqrt{2}\,,-1)$ e $(\sqrt{2}-1\,,-1)$.

Solução

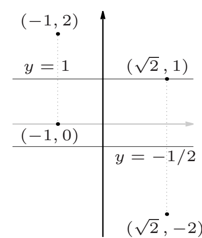
(a) Nesse item os pontos possuem as mesmas abcissas. Logo, o eixo de simetria é a reta vertical passando pelo ponto médio p_m entre 0 e 2 o qual vale: $p_m = 1$. Logo, o eixo de simetria é a reta de equação $y = 1$.

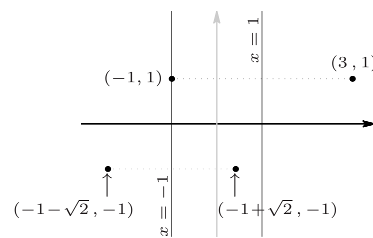
(b) Nesse caso os pontos também têm a mesma. Portanto, o eixo de simetria é a reta vertical passando pelo ponto médio p_m entre -2 e 1 o qual vale: $p_m = (-2+1)/2 = -1/2$. Logo, o eixo de simetria é a reta de equação $y = -1/2$.

(c) Nesse item os pontos possuem a mesma ordenada. Portanto, o eixo de simetria é a reta horizontal passando pelo ponto médio p_m entre -1 e 3 o qual vale: $p_m = (-1+3)/2 = 1$. Logo, o eixo de simetria é a reta de equação $x = 1$.

(d) Nesse item os pontos possuem a mesma ordenada. Logo, o eixo de simetria é a reta horizontal passando pelo ponto médio p_m entre $-1-\sqrt{2}$ e $-1+\sqrt{2}$ o qual vale: $p_m = (-1-\sqrt{2}+-1+\sqrt{2})/2 = -1$. Logo, o eixo de simetria é a reta de equação $x = 1$.

Nas figuras abaixo exibimos essas simetrias.





29. **Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cujo cubo do seu transladado por -3 é menor do que o transladado do seu quadrado por 1 .**

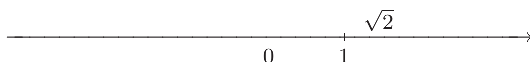
Solução Denotemos um tal ponto por y . Temos que:

- o cubo do seu transladado por -3 vale $(x-3)^3$;
- o transladado do seu quadrado por 1 vale x^2+1 .

Portanto, a inequação procurada é: $(x-3)^3 < x^2+1$.

Exercícios

1. Conhecendo na reta orientada as localizações da origem, da unidade e de $\sqrt{2}$, use um compasso e faça as representações gráficas de -1 , $2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 2 , $1-\sqrt{2}$ e de $1+\sqrt{2}$.



2. Determine os números reais que satisfazem a condição de cada item a seguir.
   (a) O seu transladado por 4 vale -3;
   (b) O seu transladado por -1 vale 2;
   (c) O quadrado do seu transladado por 2 vale 4;
   (d) O dobro do seu transladado por 1 vale -3;
   (e) O cubo do seu transladado por 2 vale 27;
   (f) A distância a -1 do dobro do seu transladado por 7, vale 3;
   (g) O seu transladado por $1{,}2$ vale 3;
   (h) O quadrado do triplo do seu transladado por -2, vale 1.

3. Determine os simétricos de $1, 4, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -2$ e de π em relação à 5.

4. Determine os simétricos de $1, 4, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -2$ e de π em relação à -1.

5. Quais dos pares de números a seguir são simétricos em relação a -3: -5 e 7, 1 e -7, -13 e 4, 0 e -4, -103 e 97?

6. Determine b de tal forma que -3 e 7 sejam simétricos em relação a b.

7. Determine o ponto médio do segmento de reta de $-\pi$ à 3.

8. Determine:
   (a) o simétrico em relação a 2 do intervalo $[5, 8)$;
   (b) o simétrico em relação a -1 do intervalo $[-1, 3)$;
   (c) o simétrico em relação a -2 do intervalo $(1, 3]$;
   (d) o simétrico em relação a -3 do intervalo $[-4, 3)$;
   (e) o simétrico em relação a 1 do intervalo $(-\infty, 2)$;
   (f) o simétrico em relação a $-\pi$ do intervalo $(-4, \infty)$;
   (g) o simétrico em relação a origem do intervalo $(-\infty, \infty)$;
   (h) o simétrico em relação a -1 do intervalo $(-\infty, \infty)$;
   (i) o simétrico em relação a origem do intervalo $(-3, \pi]$;
   (j) o simétrico em relação a -1 do intervalo $(-4, 2)$.

   Em cada item faça figuras que represente sua solução.

9. Determine os números reais cuja distância à -3 vale $\sqrt{5}$.

10. Qual é o número real que transladado por 5 produz o número $-2{,}01$.

11. Qual é o número real que transladado do seu dobro produz o número $\sqrt{3}$?

12. Determine uma equação que descreva os pontos da reta cujos transladados por -2 são iguais aos quádruplos dos seus transladados por 1. Resolva tal equação.

13. Determine uma equação que descreva os pontos da reta que estão equidistantes do seu quadrado e do seu cubo.

14. Determine uma equação que descreva os números cujos transladados por 1 coincidicem com o quadrado do seu transladado por -1.

15. Resolva as equações:
   (a) $|x-4|=1$ (b) $|x+2|=2$
   (c) $|2x-1|=2$ (d) $|1+3x|=3$
   (e) $|\frac{x}{2}-3|=1$ (f) $|2+\frac{x}{2}|=3$
   (g) $|1-\frac{x}{4}|=2$ (h) $|\frac{3x-1}{2}|=1$
   (i) $|\frac{2-3x}{5}|=3$ (j) $|x^2+1|=0$.

16. Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cujo transladado por -2 é menor ou igual a 3.

17. Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cujo dobro do transladado por -2 é maior que a sua distância a 2.

18. Seja x um número real. Qual é a expressão do seu simétrico em relação a 2? Faça uma figura que represente sua solução.

19. O simétrico em relação a 2 de um certo número real coincide com o transladado desse número por 7. Determine tal número.

20. Resolva as inequações:
(a) $|x-3|<2$ (b) $|x+1|<3$
(c) $|x-1|<3$ (d) $|3-x|<1$
(e) $|x-2|<5$ (f) $|1+x|<4$
(g) $|2-x|<1$ (h) $|x-1|<2$

21. Resolva as inequações:
(a) $|x-1|>1$ (b) $|x+1|>3$
(c) $|x-3|>1$ (d) $|2+x|>5$
(e) $|x-5|>3$ (f) $|3+x|>2$
(g) $|1-x|>0$ (h) $|x-1|>2$

22. Resolva as inequações:
(a) $|x-5|\leq 1$ (b) $|x+1|\geq 5$
(c) $|x-1|\geq 3$ (d) $|5+x|\leq 3$
(e) $|x-2|\leq 3$ (f) $|1+x|\geq 3$
(g) $|2-x|\leq 0$ (h) $|2x-1|\geq 3$

23. Determine o intervalo obtido quando:
(a) transladamos $[1,3)$ por 4;
(b) transladamos $[1,5]$ por $2{,}3$;
(c) transladamos $(-1,2)$ por -2;
(d) transladamos $(2,5]$ por $-3{,}2$;
(e) transladamos $[1,\infty)$ por -5;
(f) transladamos $(-\infty,-2]$ por $-1{,}4$.

Em cada item, faça figuras que indiquem sua solução.

24. Se um número não pertence a $(-2,3]$, a qual subconjunto da reta deverá pertencer o seu transladado por 4? Determine o menor subconjunto possível.

25. Se um número não pertence a $(-\infty,1)$, a qual subconjunto da reta deverá pertencer o simétrico do seu transladado por -2? Determine o menor subconjunto possível.

26. Sabendo que $b\in(2,4]$ determine:
(1) o menor intervalo que contém $b-2$;
(2) o menor intervalo que contém $b+3$;
(3) o menor intervalo que contém $-b$;
(4) o menor intervalo que contém $2-b$;
(5) o menor intervalo que contém $-b-1$;
(6) o menor intervalo que contém $2-|b|$.

27. Repita o exercício anterior, trocando $(2,4]$ por:
(1) $(-\infty,-1]$ (2) $(0,\infty)$
(3) $[-2,2)\cap(1,3]$ (4) $(-1,2)-[0,1)$
(5) $(-3,-1)\cup(1,3]$ (6) $(-1,2)-[0,1)$.

28. Sabendo que $a\in[-1,2)$ e $b\in(1,3]$ determine, para cada item a seguir, o menor subconjunto da reta que contém:
(1) $a+b$ (2) $a-b$
(3) $|a|+b$ (4) $a-|b|$
(5) $|a|-1$ (6) $|a|-|b|$.

29. A qual subconjunto da reta deve pertence o ponto x quando:
(a) o seu transladado por 4 pertence ao intervalo $[1,2)$;
(b) o seu transladado por -1 pertence ao intervalo $(-3,2]$;
(c) o dobro do seu transladado por 3 pertence ao intervalo $(-\infty,2]$;
(d) o triplo do seu transladado por 2 pertence ao intervalo $(3,\infty)$;
(e) a metade do seu transladado por π pertence ao intervalo $(-\infty,1)$;
(f) o quadrado do seu transladado por -2 pertence ao intervalo $(2,\infty)$;

Determine em cada caso, o menor subconjunto possível.

30. Dê uma equação que descreva os pontos da reta cujo quadrado de seu transladado por -1 vale 1. Resolva tal equação.

31. Dê uma equação que descreva os pontos da reta cujo valor absoluto é igual ao triplo do seu transladado por 2.

32. Dê uma equação que descreva os pontos da reta cujo quadrado do seu transladado por 5 coincide com a sua distância a 2 .

33. Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cujo transladado por π está à direita de -4 .

34. Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cuja distância a 2 é inferior ao transladado do seu quadrado por -1 .

35. Determine uma inequação que descreva os pontos da reta cuja distância a -2 é maior do que o dobro do seu transladado por 1 .

36. Determine a equação do eixo de simetria para cada par de pontos dados a seguir. Para cada item, faça a representação gráfica no plano cartesiano dos pontos e do eixo de simetria.

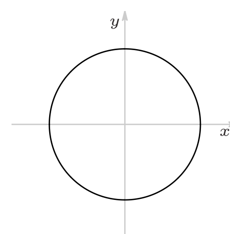
(a) $(-2\,,3\,)$ e $(-2\,,5)$
(b) $(1\,,-3\,)$ e $(1\,,5)$
(c) $(1\,,-3\,)$ e $(5\,,-3)$
(d) $(\pi\,,-1\,)$ e $(-1\,,\pi-2)$.

37. Em cada item são dados um ponto e um eixo de simetria. Determine o simétrica do ponto em relação ao eixo.

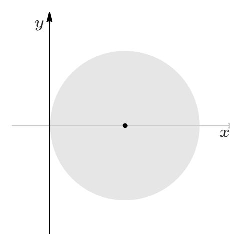
(a) $(-2\,,3\,)$ e $x=2$
(b) $(1\,,-3\,)$ e $x=-1$
(c) $(1\,,-3\,)$ e $y=\pi$
(d) $(\pi\,,-1\,)$ e $y=1$.

38. Faça um esboço do simétrico do círculo de raio 1 mostrado abaixo, em relação aos eixos de equação:

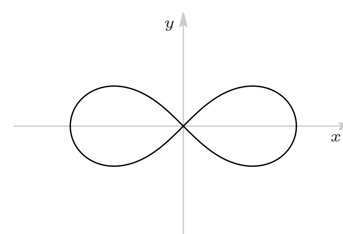
(a) $x=1$	(b) $x=-1$
(c) $x=1/2$	(d) $y=1$
(e) $y=-1$	(f) $y=2$
(g) $x=2$	(h) $x=-2$.



39. Repita o exercício anterior para o disco de raio 1 mostrado na figura abaixo.



40. A figura a seguir é a chamada *figura oito* , já mostrada anteriormente. Sua equação cartesiana é $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.



Faça um esboço do simétrico (ou refletido) dessa curva em relação aos eixos de equação:

(a) $x=1$	(b) $x=-1$
(c) $x=1/2$	(d) $y=1$
(e) $y=-1$	(f) $y=2$
(g) $x=2$	(h) $x=-2$.

4

Propriedades das operações

1 Propriedades

Propriedades da adição e da multiplicação de números reais	
1. **Comutatividade:**	$a + b = b + c$ $a \times b = b \times a$
2. **Associatividade:**	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
3. **Elemento neutro:**	$\exists\, 0$ **tal que:** $a + 0 = a = 0 + a$ $\exists\, 1$ **tal que:** $a \times 1 = a = 1 \times a$
4. **Simétrico:**	**para cada** a **existe** $-a$ **tal que** $a + (-a) = 0 = (-a) + a$
5. **Inverso:**	**para cada** $b \neq 0$ **existe** b^{-1} **tal que** $b \times b^{-1} = b^{-1} \times b = 1$
6. **Distributividade:**	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Lembre-se que as propriedades de comutatividade e associatividade já apareceram nas operações de união e interseção de conjuntos.

Dois fatos muito importantes e que não estão explícitos nas seis propriedades listadas são

os seguintes:

- o simétrico de um número real é único, isto é, o único número real que somado à b produz zero como resultado é o seu simétrico $-b$;
- o inverso de um real não nulo é único, isto é, o único número real que multiplicado pelo real não nulo b produz 1 como resultado é o seu inverso b^{-1} que também é denotado por $\frac{1}{b}$ ou $1/b$.

Não é difícil demonstrar essas duas propriedades usando as seis propriedades listadas anteriormente. Não menos importante que as duas propriedades acima é a unicidade dos elementos neutros para a soma e para a multiplicação.

Exemplos

❄ Comutatividade $\begin{cases} 7+8=8+7 \\ 4\times 5=5\times 4\,. \end{cases}$

❄ Associatividade $\begin{cases} (7+2)+3=7+(2+3) \\ (2\times 8)\times 5=2\times(8\times 5)\,. \end{cases}$

❄ Elemento neutro $\begin{cases} 6+0=6=0+6 \\ 2\times 1=2=1\times 2\,. \end{cases}$

❄ O *simétrico* de 5 é -5 e o de -3 é 3.

❄ O *inverso* de 8 é $\frac{1}{8}$ pois $8\times\frac{1}{8}=1$.

❄ O *inverso* de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$ pois $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$.

❄ O *inverso* de $-\frac{5}{7}$ é $-\frac{7}{5}$ pois $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=1$.

❄ Distributividade: $3\times(5+7)=3\times 5+3\times 7$.

1.1 Utilidade prática das propriedades

As propriedades da adição e da multiplicação também servem para simplificar e facilitar cálculos.

1. *Comutatividade e associatividade* : às vezes, mudar a ordem das parcelas ou dos fatores facilita o cálculo, de modo que ele pode ser feito até mentalmente.
   - $50+1239+50=\underbrace{50+50}_{100}+1239=100+1239=1339$.
   - $2\times 342\times 5=\underbrace{2\times 5}_{10}\times 342=10\times 342=3420$.
   - $20+6+28+2=\underbrace{(20+6)}_{26}+\underbrace{(28+2)}_{30}=26+30=56$.
2. *Distributividade* : também pode facilitar os cálculos mentais.
   - $13\times 101=13\times(100+1)=13\times 100+13\times 1=1.300+13=1.313$.

1.2 Subtração e Divisão

Subtração: definimos e denotamos a *subtração* de a por b da seguinte forma:

$$a - b := a + (-b)$$

Divisão: quando $\boldsymbol{b \neq 0}$ definimos e denotamos a *divisão* de a por b da seguinte forma:

$$a \div b := a \times b^{-1}.$$

Para $a \div b$ também usamos as notações: $\dfrac{a}{b}$ ou a/b. Dizemos que a/b é uma *fração* com *numerador* a e *denominador* b.

Algumas conseqüências das propriedades das operações

- $a \times 0 = 0$
- $(-1) \times a = -a$
- $a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$
- $-(-a) = a$
- $-(a + b) = -a - b$
- $(a \div b) \div c = a \div (bc)$ quando $b\,, c \neq 0$

Esses resultados podem ser demonstrados usando as propriedades do quadro da página 76.

Note que a primeira conseqüência nos garante que zero não possui inverso já que não existe um número real b tal que $0 \times b = 1$.

O último item nos mostra que a divisão não é uma operação associativa. Você pode mostrar também que ela não é comutativa. Idem para a operação de subtração.

Exemplos

❄ $1.088.967 \times 0 = 0$.

❄ O simétrico de -4 é $-(-4) = 4$.

❄ $(-1) \times 5 = -5$ e $(-1) \times (-7) = -(-7) = 7$.

❄ $3 \times (-5) = -(3 \times 5) = -15$.

❄ $-(a + 5) = -a - 5$.

❄ $-(a - b + 8) = -a + b - 8$.

❄ $(2/3)/4 = 2/(3 \times 4) = 2/12 = 1/6$.

❄ $\big((3/5)/2\big)/7 = \big(3/(5 \times 2)\big)/7 = 3/(2 \times 5 \times 7)$.

❄ $\pi \times (-1) = -\pi$;

❄ $10.993\,,674 \times (-0\,,2198) \times 0 = 0$.

1.3 Regras de sinais

Adição

- A soma de dois números positivos é positiva e a soma de dois números negativos é negativa.

  $(+) + (+) = (+)$ ☞ $3+5=8$
  $(-) + (-) = (-)$ ☞ $-2-3=-(2+3)=-5$

- Ao somar números com sinais contrários, podemos obter como resultado um número positivo, nulo ou negativo.

  ☞ $9-5=4$ ☞ $3-3=0$ ☞ $3-10=-(10-3)=-7$

Multiplicação e Divisão
Multiplicando-se ou dividindo-se números com um mesmo sinal o resultado é positivo, e números com sinais diferentes o resultado é negativo.

$(+) \times (+) = (+)$	☛ $3\times 5 = 15$	$(+) \div (+) = (+)$	☛ $10 \div 5 = 2$
$(-) \times (-) = (+)$	☛ $(-2)\times(-3) = 6$	$(-) \div (-) = (+)$	☛ $(-9)\div(-3) = 3$
$(+) \times (-) = (-)$	☛ $(-2)\times 4 = -8$	$(+) \div (-) = (-)$	☛ $6\div(-2) = -3$
$(-) \times (+) = (-)$	☛ $3\times(-4) = -12$	$(-) \div (+) = (-)$	☛ $(-8)\div 2 = -4$

2 Uma conseqüência muito importante

Dissemos que uma fração é uma expressão do tipo $\frac{a}{b}$ que significa $a \times \frac{1}{b}$ onde $a\,,b$ são números reais e o denominador $b \neq 0$. Assim, para que uma fração esteja *bem definida* é preciso que o *denominador seja não nulo*.

Bem sabemos, por exemplo, que:

☞ $\frac{1}{\pi}$ está bem definido pois $\pi \neq 0$;

☞ $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ está bem definido pois $\sqrt{2} \neq 0$;

☞ $\frac{14{,}02}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ está bem definido pois $\sqrt{2}-\sqrt{3} \neq 0$.

☞ $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{0{,}21}$ está bem definido pois $0{,}21 \neq 0$.

No entanto,

☞ $\dfrac{1}{x}$ só estará bem definido quando $x \neq 0$;

☞ $\dfrac{2}{(x+1)^2}$ só está bem definido para $x \neq -1$;

☞ $\dfrac{x+1}{x-2}$ está bem definido quando, e somente quando, $x \neq 2$;

☞ $\dfrac{x}{x}$ só está bem definido para $x \neq 0$;

☞ $\dfrac{x-\sqrt[3]{5}}{x(x^2-1)}$ só está bem definido para $x \in \mathbb{R} - \{-1\,,\,0\,,\,1\}$.

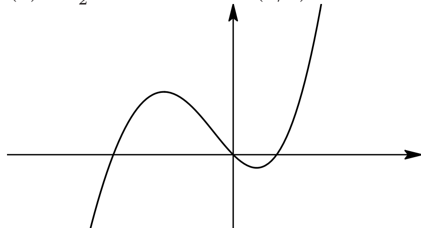
Quando manipulamos uma expressão é importante saber para quais valores da variável essa expressão está *bem definida*, ou seja, para quais valores da variável tal expressão pode ser avaliada. O conjunto dos números reais para os quais uma expressão pode ser avaliada é dito *domínio de definição da expressão*, ou simplesmente, *domínio da expressão*.

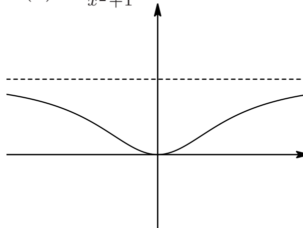
Nos cinco exemplos que acabamos de apresentar os domínios de definição das expressões são, respectivamente: $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{-1\}$, $\mathbb{R} - \{1\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{-1\,,\,0\,,\,1\}$.

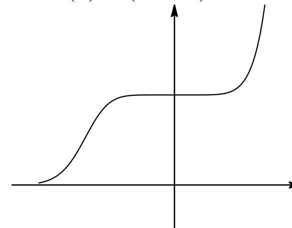
Existem vários outros conceitos importantes relacionados com as expressões. Por exemplo, o conceito de gráfico. O *gráfico de uma expressão* $E(x)$ é o conjunto

$$\big\{\big(x\,,E(x)\big) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ x \ \text{ pertence ao domínio da expressão}\big\}.$$

Em Cálculo I você verá técnicas apropriadas para esboçar gráfico de expressão não elementares. As figuras a seguir exibem gráficos de algumas expressões feitas com o software Mathematica.







Note que o domínio de cada uma dessas expressões é toda a reta.

Exemplos

- ❄ O domínio da expressão $x^2 - x^3 - 2$ é toda a reta pois essa expressão pode ser avaliada em qualquer número real ;
- ❄ O domínio da expressão $\sqrt{x}$ é o intervalo $[0, \infty)$ pois essa expressão só pode ser avaliada quando $x \geq 0$;
- ❄ O domínio da expressão $\sqrt{-x}$ é o intervalo $(-\infty, 0]$ pois essa expressão só pode ser avaliada quando $x \leq 0$;
- ❄ O domínio da expressão $1/\sqrt{|x|}$ é o conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ pois essa expressão só pode ser avaliada quando $x \neq 0$;

Outra questão importante sobre expressões é saber em que pontos do seu domínio a expressão se anula. Esses pontos são os *zeros* da expressão.

Note que uma expressão dada na forma de uma fração, se anula num dado ponto do seu domínio quando ela está bem definida no ponto e, além disso, o numerador se anula nesse ponto.

Exemplos

- ❄ $\dfrac{1+x}{x}$ está bem definida para $x \neq 0$ e só se anula em $x = -1$.
- ❄ $\dfrac{1+x}{x^2-1}$ está bem definida para $x \neq \pm 1$ e nunca se anula em seu domínio de definição pois, o ponto no qual o numerador se anula é um ponto no qual a expressão não está bem definida.
- ❄ $\dfrac{x(1-x)}{x(x+1)}$ está bem definida quando $x \neq 0, -1$. O numerador dessa expressão se anula em $x = 0$ e em $x = 1$. No entanto, a expressão dada se anula apenas em $x = 1$ pois em $x = 0$ ela não está bem definida.
- ❄ $x^2 - 4$ está bem definida para todo x real e só se anula quando $x = \pm 2$.
- ❄ A espressão $x/|x|$ nunca se anula em seu domínio de definição.

3 Fatoração

Fatorar a expressão $\boldsymbol{a \times b + a \times c}$ é escrevê-la na forma $\boldsymbol{a \times (b + c)}$, isto é:

$$a \times b + a \times c = a \times (b + c) \, .$$

Nesse caso, dizemos que o fator a foi colocado em *evidência*. Mais geralmente, fatorar uma expressão é escrevê-la como um produto de fatores.

Exemplos

❄ $2x - 4y = 2\,(x - 2y)$;

❄ $x^2 - 2x^4 = x^2(1 - 2x^2)$;

❄ $x^2 - 2x = x\,(x - 2)$;

❄ $x - x^2 = x\,(1 - x)$;

❄ $2 - y = 2 - 2 \times \frac{y}{2} = 2\Big(1 - \frac{y}{2}\Big)$;

❄ $x^3 + 2x^2 - x - 1 = x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$ quando $x \neq 0$;

❄ $2x^5 - 3x^3 - x^2 - 5 = x^5\left(2 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^5}\right)$ quando $x \neq 0$;

❄ $2 - x = \frac{2x}{x} - x = x\left(\frac{2}{x} - 1\right)$ quando $x \neq 0$;

❄ $\frac{1}{2x} - x = \frac{x}{2x^2} - x = x\left(\frac{1}{2x^2} - 1\right)$ quando $x \neq 0$;

❄ $\frac{1}{2x} - x = \frac{1}{2x} - \frac{2x^2}{2x} = \frac{1}{2x}\left(1 - 2x^2\right)$ quando $x \neq 0$;

No quadro a seguir apresentamos algumas igualdades conhecidas como *produtos notáveis*. Elas podem ser obtidas através da propriedade de distributividade.

3.1 Produtos notáveis

Igualdade	Exemplo
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

3.2 Completando quadrados

Completar quadrado numa expressão da forma ax^2+bx+c onde $a \neq 0$, é escrevê-la na forma

$$\boldsymbol{A(x+B)^2+C} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\pm(A\,x+B)^2+C} \tag{4.1}$$

Trata-se de uma técnica muito importante no estudo da expressão ax^2+bx+c.

Podemos obtê-la fazendo as seguintes operações:

$$ax^2+bx+c = a\Big[x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}\Big] = a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\Big] = a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

Note que a expressão à direita tem a forma $A(x+B)^2+C$. A segunda expressão em (4.1) pode ser facilmente obtida da primeira. Só não podemos esquecer que temos dois casos distintos à considerar: $A>0$ e $A<0$. Isso ficará claro nos exercícios resolvidos.

Exemplos

❄ $x^2+2x+2 = \big\{(x+1)^2-1\big\}+2 = (x+1)^2+1$;

❄ $x^2-x = \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2-\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{1}{4}$;

❄ $1+4x-x^2 = -\{x^2-4x-1\} = -\big\{\big[(x-2)^2-2^2\big]-1\big\} = -(x-2)^2+5$;

❄ $2x^2+x-1 = \Big\{\Big(\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2-\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2\Big\}-1 = \Big(\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2-\frac{1}{8}-1 = \Big(\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2-\frac{9}{8}$;

❄ $x^4-2x^2-2 = \big\{(x^2-1)^2-1\big\}-2 = (x^2-1)^2-3$;

❄ $\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}-1 = \Big\{\Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\Big)^2-\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big\}-1 = \Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{1}{4}-1 = \Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{5}{4}$ quando $y \neq 0$.

4 Leis de cancelamento

Na adição:

$$\boldsymbol{a+b=a+c \iff b=c.}$$

Na multiplicação, quando $\mathbf{c \neq 0}$ temos:

$$\boldsymbol{a\times b=a\times c \iff b=c.}$$

Essas propriedades desempenham um papel crucial na simplificação e, conseqüentemente, na resolução de equações.

Exemplos

- $2x + \sqrt{2} = \sqrt{2} \iff 2x = 0 \iff x = 0\,;$
- $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} \iff x = y\,;$
- Cancelando x na equação $3x = 2x$ obtemos $3 = 2 \ldots$ **o que é absurdo**.

  Conseguimos esse absurdo porque cancelamos o que não podia ser cancelado. Repare que da igualdade $3x = 2x$ (ou seja, $3x - 2x = 0$) concluímos que $x = 0$. Assim, ao fazer o cancelamento, estávamos cancelando o fator *zero* em cada membro da equação, o que não é permitido pela lei do cancelamento na multiplicação.

5 $\mathrm{a} \times \mathrm{b} = 0 \iff \mathrm{a} = 0$ ou $\mathrm{b} = 0$

Essa propriedade é uma conseqüência da lei de cancelamento na multiplicação. Ela nos garante que: *um produto de fatores se anula quando, e somente quando, pelo menos um dos fatores se anula*.

Assim,

$$\boldsymbol{a \times b \times c = 0} \iff \boldsymbol{a = 0} \text{ ou } \boldsymbol{b = 0} \text{ ou } \boldsymbol{c = 0}\,.$$

Da mesma forma:

$$\boldsymbol{a \times b \times c \times d = 0} \iff \boldsymbol{a = 0} \text{ ou } \boldsymbol{b = 0} \text{ ou } \boldsymbol{c = 0} \text{ ou } \boldsymbol{d = 0}\,.$$

Como no caso da primeira propriedade do módulo, essa propriedade nos ensina resolver um tipo especial de equação.

Exemplos

- $x(2-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2\,;$
- $x(2-x)(3-2x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = 3/2\,;$
- $2(x-1) = 0 \iff x = 1$ já que $2 \neq 0\,;$
- $2(2-x)(2+x^2) = 0 \iff 2 - x = 0 \iff x = 2\,.$
  Repare que $2 + x^2$ nunca se anula. Mais precisamente, $2 + x^2 \geq 2\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\,;$

❄ $(2x+3)^3(1+2x^2)=0 \iff (2x+3)^3=0 \iff 2x+3=0 \iff x=-3/2$.
Novamente, $1+2x^2$ nunca se anula. De fato, temos que $1+2x^2 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercícios resolvidos

1. **Efetue.**

(a) $x(2-3x)$ **(b)** $3x(x^3-2x^2+1)$ **(c)** $(x+2)(x+3)$ **(d)** $(x-2)(x+1)$
(e) $x(x^2+2)$ **(f)** $(1-x)(1+2x)$ **(g)** $(x^3-x+2)(3-x^2)$ **(h)** $(x^2-1)x(x+1)$.

Solução Usando a distributividade da multiplicação em relação à soma e à subtração obtemos:

(a) $x(2-3x)=2x-3x^2$.

(b) $3x(x^3-2x^2+1)=3x^4-6x^3+3x$.

(c) $(x+2)(x+3)=x(x+3)+2(x+3)=x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$.

(d) $(x-2)(x+1)=x(x+1)-2(x+1)=x^2+x-2x-2=x^2-x-2$.

(e) $x(x^2+2)=x^3+2x$.

(f) $(1-x)(1+2x)=1+2x-x(1+2x)=1+2x-x-2x^2=1+x-2x^2$.

(g) $(x^3-x+2)(3-x^2)=x^3(3-x^2)-x(3-x^2)+2(3-x^2)=3x^3-x^5-3x+x^3+6-2x^2$
$=-x^5+4x^3-2x^2-3x+6$

(h) $(x^2-1)x(x+1)=(x^2-1)(x^2+x)=x^2(x^2+x)-(x^2+x)=x^4+x^3-x^2-x$.

2. **Determine o sinal sem efetuar os cálculos:**

(a) -39×1298 **(b)** $(-45)\times(-24)\times(-1)$

(c) $(-3)^3\times(-5)^6$ **(d)** $\dfrac{1,5^5\times(-2)^3\times(-1)^5}{(-2)^4\times(-6)^7}$

Solução Analizando o sinal de cada fator, concluímos que:

(a) $-39\times 1.298=-(39\times 1.298)$ que é um número negativo.

(b) $(-45)\times(-24)\times(-1)$: aqui temos três fatores com sinais negativos logo, o número em questão é negativo, isto é, $(-45)\times(-24)\times(-1)<0$.

(c) $(-3)^3\times(-5)^6$: aqui temos $(-3)^3<0$ e $(-5)^6>0$. conseqüentemente, $(-3)^3\times(-5)^6<0$.

(d) $\dfrac{1,5^5\times(-2)^3\times(-1)^5}{(-2)^4\times(-6)^7}$: aqui temos $(-2)^3<0$ e $(-1)^5<0$. Logo, o numerador da fração é positivo. Por outro lado, $(-2)^4>0$ e $(-6)^7<0$. Portanto, o denominador é negativo. Concluímos daí que a fração em questão é negativa.

3. **Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Determine quais das afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas.**
(1) $(-a)^3$ é um número negativo.
(2) Se ab é um número positivo então $a + b$ é positivo.
(3) Se $a + b$ é um número positivo então a e b são positivos.
(4) $a + 1.000$ é um número não negativo.

Solução Temos que:

(1) Essa afirmação é **falsa** pois quando $a = -1$ resulta que $(-a)^3 = (-(-1))^3 = 1^3 = 1 > 0$.

Você poderia colocar outra justificativa:

Essa afirmação é **falsa** pois quando $a = 0$ resulta que $(-a)^3 = 0$ e, portanto, não negativo.

(2) Essa afirmação também é **falsa** pois para $a = -1 = b$ temos que: $ab = (-1)(-1) = 1 > 0$ mas, no entanto, $a + b = (-1) + (-1) = -2 < 0$.

(3) Essa também é **falsa** pois fazendo $a = 1$ e $b = 0$ resulta que $a + b = 1 + 0 = 1 > 0$ e, no entanto, a e b não são positivos, já que $b = 0$.

(4) Estamos, novamente, diante de uma afirmação **falsa**. Para ver isso, basta tomar $a = -2.000$. Nesse caso, teremos: $a + 1.000 = -2.000 + 1.000 = -1.000$ que é um número negativo.

4. **Avalie as expressões a seguir nos pontos 0 ; -1 ; 1 ; 2 ou diga em quais desses pontos elas não podem ser avaliadas.**

(a) $\dfrac{x}{x-2}$ **(b)** $\dfrac{x}{x(x-1)}$ **(c)** $\dfrac{x+1}{x}$.

Solução Passemos a avaliação das ezpressões.

(a) Avaliação de $\dfrac{x}{x-2}$:

☞ A expressão não pode ser avaliada em $x = 2$ pois o denominador da expressão se anula nesse ponto.

☞ Em $x = 0$ a expressão vale: $\dfrac{0}{0-2} = 0$.

☞ Em $x = -1$ a expressão vale: $\dfrac{-1}{-1-2} = \dfrac{1}{3}$.

☞ Em $x = 1$ a expressão vale: $\dfrac{1}{1-2} = -1$.

(b) Avaliação de $\dfrac{x}{x\,(x-1)}$:

☞ A expressão não pode ser avaliada em $x = 0$ e em $x = 1$ pois o denominador da expressão se anula nesses pontos.

☞ Em $x = 2$ a expressão vale: $\dfrac{2}{2\,(2-1)} = 1$.

(c) Avaliação de $\dfrac{x+1}{x}$:

☞ A expressão não pode ser avaliada em $x = 0$ pois o denominador da expressão se anula nesse ponto.

☞ Em $x = -1$ a expressão vale: $\dfrac{-1+1}{-1} = 0$.

☞ Em $x = 1$ a expressão vale: $\dfrac{1+1}{1} = 2$.

☞ Em $x = 2$ a expressão vale: $\dfrac{2+1}{2} = 3/2$.

5. **Determine o domínio das expressões a seguir. Determine também os pontos onde tais expressões se anulam.**

(a) $\dfrac{2x}{x^2-1}$ **(b)** $\dfrac{x+2}{x^2+1}$ **(c)** $\dfrac{|x|}{x(x-1)}$ **(d)** $\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x}}$.

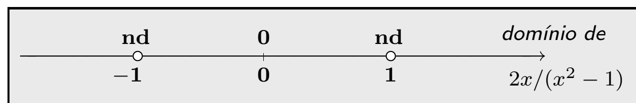
Solução Para isso, precisamos determinar os pontos onde tais expressões podem ser avaliadas e os pontos onde elas se anulam.

(a) Essa expressão só não pode ser avaliada quando $x^2 = 1$, isto é, quando $x = \pm 1$. Assim o domínio de definição da expressão é $\mathbb{R} - \{1\,,\,-1\} = (-\infty\,,-1) \cup (-1\,,1) \cup (1\,,\infty)$.

Por outro lado, o numerador dessa expressão só se anula quando $2x = 0$, isto é, quando $x = 0$. Logo, a expressão só se anula em $x = 0$ já que 0 está no domínio da expressão.

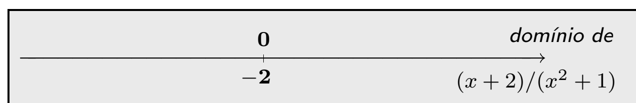
Na figura abaixo mostramos a representação gráfica do domínio e dos pontos onde a expressão se anula.

☛ **Nota:** Com frequência vamos usar a abreviação **nd** para significar *não definido*.



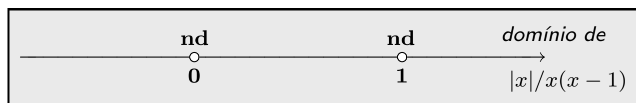
(b) O numerador dessa expressão está bem definido para todos os valores de x . Por outro lado, o denominador da expressão nunca se anula pois $x^2 + 1 \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim o domínio de definição da expressão é $\mathbb{R}$.

O numerador se anula quando $x+2 = 0$, isto é, quando $x = -2$. Logo, a expressão se anula apenas para $x = -2$.



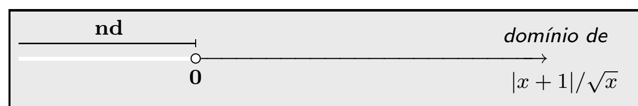
(c) A expressão só não está bem definida em $x = 0$ e em $x = 1$. Assim o domínio de definição da expressão é $\mathbb{R} - \{0\,,\,1\} = (-\infty\,,0) \cup (0\,,1) \cup (1\,,\infty)$.

O numerador só se anula quando $x = 0$. No entanto, nesse ponto a fração não está bem definida. conseqüentemente, essa expressão *nunca se anula em seu domínio de definição*.



(d) A expressão só está bem definida quando $x > 0$. Seu domínio de definição é o intervalo $(0\,,\infty)$.

OPor sua vez, o numerador só se anula quando $x = -1$. No entanto, nesse ponto a fração não está bem definida. Logo, essa expressão *nunca se anula em seu domínio de definição*.



6. Determine o domínio de definição da expresão $E(x) = \dfrac{1 - \dfrac{x}{1-2x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.

Solução A expressão $E(x)$ não está bem definida nas seguintes situações:

☞ Quando $1 - 2x = 0$
pois nesse caso $\dfrac{x}{1-2x}$ não está bem definido.
Resolvendo $1 - 2x = 0$ obtemos $x = 1/2$.

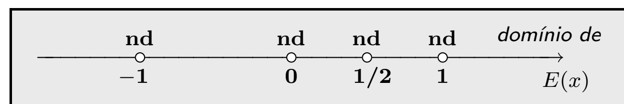
☞ Quando $x = 0$
pois nesse caso $1/x^2$ não está bem definido;

☞ Quando $1 - \dfrac{1}{x^2} = 0$
pois nesse caso o denominador da expressão inicial se anula.
Resolvendo a equação $1 - \dfrac{1}{x^2} = 0$ obtemos $x^2 = 1$, isto é, $x = \pm 1$.

Finalizando, concluímos que o domínio de definição da expressão $E(x)$ é o conjunto

$$\mathbb{R} - \left\{-1\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}\,,\,1\right\}$$

exibido graficamente na figura ao lado.



7. Sejam $a\,, b > 0$ **tais que** $a^3 = 5$ **e** $a^5 = 12b^2$**. Determine a razão de** a **para** b**.**

Solução Para determinar a/b é suficiente determinar uma potência de a/b. Para isso, calculemos:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 \times 12}{a^5} = \frac{12}{a^3} = \frac{12}{5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{12}{5}}$$

pois a e b são positivos.

8. Sabendo que $7(2x - 5) = 21$ **calcule** $2x + 3$**.**

Solução Para calcular o valor de $2x + 3$ não precisamos passar, necessariamente, pela determinação do valor de x. Vejamos:

$$7(2x-5) = 21 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 5 = \frac{21}{7} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 5 + 8 = 11 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 3 = 11\,.$$

9. Seja $a*b := \dfrac{a+b}{b-2a}$. Qual o domínio da expressão $E(x) = \dfrac{1}{2*x}$?

Solução Para isso, precisamos responder as seguintes perguntas:

(i) Para quais valores de x a expressão $2*x$ está bem definida ?
Temos que

$$2*x = \frac{2+x}{x-2\times 2} = \frac{2+x}{x-4}. \tag{4.2}$$

Assim, $2*x$ só não está bem definida para $x=4$.

(ii) Para quais valores de x a expressão $2*x$ se anula ? De (4.2) temos que $2*x$ só se anula para $x=-2$.

Concluímos então que o domínio de definição da expressão $E(x)$ é $\mathbb{R}-\{2\,,4\}$.

10. Fatore as expressões

(a) x^3-3x (b) a^2-4x^2 (c) $1-2x^2$ (d) x^4-16
(e) $4x-x^5$ (f) x^3-8 (g) $8-x^6$ (h) $(1/x^3)-1$.

Solução Para fatorar essas expressões vamos lançar mão dos produtos notáveis.

(a) $x^3-3x = x(x^2-3) = x\big(x-\sqrt{3}\big)\big(x+\sqrt{3}\big)$.

(b) $a^2-4x^2 = (a-2x)(a+2x)$.

(c) $1-2x^2 = (1-\sqrt{2}\,x)(1+\sqrt{2}\,x)$.

(d) $x^4-16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$.

(e) $4x-x^5 = x(4-x^4) = x(2-x^2)(2+x^2) = x(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(2+x^2)$.

(f) $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$.

(g) $8-x^6 = (2-x^2)(4+2x^2+x^4) = (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(4+2x^2+x^4)$.

(h) $\dfrac{1}{x^3}-1 = \left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1\right)$ quando $x\neq 0$.

11. Complete quadrados nas expressões a seguir.
(a) x^2-6x (b) $x-4x^2$ (c) x^2+x+2
(d) $1-2x-3x^2$ (e) $(1/x^2)-(1/x)$ (f) x^4-4x^2+1.

Solução Para essas expressões temos:

(a) $x^2-6x = (x-3)^2-9$.

(b) $x-4x^2 = -(4x^2-x) = -\left\{\left(2x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}\right\} = -\left(2x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{16}$.

(c) $x^2+x+2 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+2 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$.

(d) $1-2x-3x^2 = -\{3x^2+2x-1\} = -\left\{\left(\sqrt{3}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{3}-1\right\} = -\left(\sqrt{3}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4}{3}\,.$

(e) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ quando $x\neq 0$.

(f) $x^4-4x^2+1 = (x^2-2)^2-4+1 = (x^2-2)^2-3\,.$

12. **Identifique os produtos notáveis:**
(a) $2x^2-2$ (b) x^3-2 (c) $2+x^3$ (d) x^3+a (e) $1-1/x^2$.

Solução Temos que:

(a) $2x^2-3 = \left(\sqrt{2}\,x\right)^2-\left(\sqrt{3}\,\right)^2 = \left(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\,\right)\left(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,\right)\,.$

(b) $x^3-2 = x^3-\left(\sqrt[3]{2}\,\right)^3 = \left(x-\sqrt[3]{2}\,\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4}\,\right)\,.$

(c) $2+x^3 = \left(\sqrt[3]{2}\,\right)^3+x^3 = \left(\sqrt[3]{2}+x\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\,x+x^2\right)\,.$

(d) $x^3+a = x^3+\left(\sqrt[3]{a}\,\right)^3 = \left(x+\sqrt[3]{a}\,\right)\left(x^2-\sqrt[3]{a}\,x+\sqrt[3]{a^2}\,\right)\,.$

(e) $1-1/x^2 = (1-1/x)(1+1/x)$ quando $x\neq 0$.

13. **Sejam $a\,,b\in\mathbb{R}$. Mostre que as igualdades a seguir são verdadeiras.**
(1) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ (2) $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}$.

Solução Para mostrar as igualdades acima, vamos operar sobre um dos membros da igualdade afim de obter o outro membro.

(1) Temos que:
$(a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2) = 4ab$ demonstrando a primeira igualdade.

(2) Completando quadrados obtemos:
$a^2+ab+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+\frac{4b^2}{4} = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}$ como queríamos demonstrar.

14. **Sejam a e b dois números reais *distintos* e seja $c=a-b$.**
Multiplicando ambos os membros da igualdade $c=a-b$ por $a-b$
obtemos: $c(a-b)=(a-b)^2$.
Logo: $ac-bc=a^2-2ab+b^2$.
Assim: $ac-a^2=bc-2ab+b^2$.
Portanto: $ac+ab-a^2=bc-ab+b^2$.
conseqüentemente: $a(c+b-a)=b(c+b-a)$.
Cancelando, resulta: $a=b$.

☞ **Começamos com a hipótese $a \neq b$ e terminamos concluíndo que $a = b$. Onde está o erro ?**

Solução Todas as passagens estão corretas, exceto a última quando cancelamos o termo $c + b - a$. Sendo $c = a - b$ segue que $c + b - a = 0$ e a lei de cancelamento na multiplicação nos diz: o fator a ser cancelado *não pode ser nulo*.

15. **Resolva as equações:**
(1) $x(x+1) = 0$
(2) $(1 - x^2)x = 0$
(3) $(x^2 + 2)(x - 1) = 0$
(4) $(2 + \sqrt{x}\,)(x^2 + 1) = 0$
(5) $(2 - x)(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$
(6) $(2x - x^2)(x^3 - 3x)(2 - 3x) = 0$
(7) $(1 - \sqrt{x}\,)(x + 1) = 0$
(8) $x(1 - 2/x) = 0$.

Solução Temos que:

(1) $x(x+1) = 0 \iff x = 0$ ou $x + 1 = 0 \iff x = 0$ ou $x = -1$.
Logo, as soluções da equação são: 0 e -1.

(2) $(1 - x^2)x = 0 \iff 1 - x^2 = 0$ ou $x = 0 \iff x^2 = 1$ ou $x = 0$.
conseqüentemente, as soluções da equação são: $0\,, -1$ e 1.

(3) $(x^2 + 2)(x - 1) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$, já que $x^2 + 2$ nunca se anula.
Portanto, a equação tem uma única solução, a saber: 1.

(4) A equação $(2 + \sqrt{x}\,)(x^2 + 1) = 0$ não tem soluções pois:

- Para $x < 0$ sabemos que $\sqrt{x}$ não está definida ;
- Para $x \geq 0$ temos que $2 + \sqrt{x}$ e $x^2 + 1$ nunca se anulam. Mais precisamente, temos que $2 + \sqrt{x} \geq 2$ e $x^2 + 1 \geq 1$.

(5) $(2 - x)(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0 \iff 2 - x = 0$ ou $x^2 - 9 = 0 \iff x = 2$ ou $x^2 = 9$, já que $x^2 + 1$ não se anula. conseqüentemente, o conjunto solução da equação é $\mathcal{S} = \{2\,, 3\,, -3\}$.

(6) $(2x - x^2)(x^3 - 3x)(2 - 3x) = 0 \iff 2x - x^2 = 0$ ou $x^3 - 3x = 0$ ou $2 - 3x = 0$.
Por sua vez:

- $2x - x^2 = 0 \iff x(2 - x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.
- $x^3 - 3x = 0 \iff x(x^2 - 3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
- $2 - 3x = 0 \iff x = 2/3$.

Portanto, o conjunto solução da equação do item (6) é $\mathcal{S} = \{0\,, 2\,, -\sqrt{3}\,, \sqrt{3}\,, 2/3\}$.

(7) Essa equação só está bem definida para $x \geq 0$. Nesse caso, $x + 1 > 0$ e temos:

$$(1 - \sqrt{x}\,)(x + 1) = 0 \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1\,.$$

conseqüentemente, a equação possui uma única solução, a saber, $x = 1$.

(8) Essa equação só está bem definida para $x \neq 0$. Nesse caso, apenas o segundo fator pode se anular, e temos:

$$x\Big(1 - \frac{2}{x}\Big) = 0 \iff 1 - \frac{2}{x} = 0 \iff 1 = \frac{2}{x} \iff x = 2\,.$$

Portanto, a equação tem uma única solução, a saber, $x = 2$.

16. Mostre que $a^2 = 1$ quando, e somente quando $a = 1$ ou $a = -1$.

Solução Temos que:

$$\boxed{x^2 = 1 \iff x = \pm 1}$$

$$a^2 = 1 \iff a^2 - 1 = 0 \iff (a-1)(a+1) = 0 \iff a = 1 \text{ ou } a = -1\,.$$

17. Mostre que $a^2 = b^2$ quando, e somente quando $a = b$ ou $a = -b$.

Solução Como no exercício anterior, temos que:

$$\boxed{y^2 = x^2 \iff y = \pm x}$$

$$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a-b)(a+b) = 0 \iff a = b \text{ ou } a = -b\,.$$

18. Seja b um número real qualquer. Resolva a equação $x^2 = b$.

Solução Temos dois casos a considerar.

- **Caso 1:** $b < 0$.
  Nesse caso a equação $x^2 = b$ não tem soluções pois x^2 não assume valores negativos.
- **Caso 2:** $b \geq 0$.
  Nesse caso podemos aplicar o exercício anterior e temos:

$$x^2 = b \iff x^2 = \left(\sqrt{b}\right)^2 \iff x = \pm\sqrt{b}.$$

Em resumo, concluímos: a equação $x^2 = b$

☞ *não tem soluções* quando $b < 0$;
☞ *tem uma única solução* quando $b = 0$, a saber, a solução $x = 0$;
☞ *tem duas soluções distintas* quando $b > 0$, a saber, as soluções $\sqrt{b}$ e $-\sqrt{b}$.

19. Fatore as expressões a seguir e determine onde cada uma delas se anula.
(a) $3x - x^2$ (b) $2x - x^3$ (c) $x^4 - 9$.

Solução Temos que:

(a) $3x - x^2 = x(3 - x)$.
Portanto: $3x - x^2 = 0 \iff x(3-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$.
Resulta então que a expressão se anula apenas nos pontos do conjunto $\mathcal{S} = \{3\,,0\}$.

(b) $2x - x^3 = x(2 - x^2)$.
Assim:

$$2x - x^3 = 0 \iff x(2 - x^2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 2 \iff x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2}\,.$$

Logo, o conjunto dos pontos onde a expressão se anula é $\mathcal{S} = \{0\,,\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,\}$.

(c) $x^4 - 9 = (x^2-3)(x^2+3) = \big(x-\sqrt{3}\big)\big(x+\sqrt{3}\big)(x^2+3)$.

conseqüentemente: $x^4 - 9 = 0 \iff x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$, já que x^2+3 nunca se anula.

Segue então que a expressão só se anula em $\mathcal{S} = \big\{-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}\,\big\}$.

20. Complete quadrados nas expressões a seguir e conclua que nenhuma delas se anula.
(a) $x^2 - 2x + 5$ (b) $2x^2 + 5x + 6$ (c) $x - 1 - x^2$ (d) $-2x^2 + 4x - 3$.

Solução Completando quadrados obtemos:

(a) $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 - 1 + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4$.
Portanto, $x^2 - 2x + 5$ nunca se anula pois $x^2 - 2x + 5 \geq 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $$2x^2+5x+6 = 2\big(x^2+\tfrac{5}{2}x+3\big) = 2\Big\{\big(x+\tfrac{5}{4}\big)^2 - \tfrac{25}{16}+\tfrac{48}{16}\Big\}$$
$$= 2\Big\{\big(x+\tfrac{5}{4}\big)^2 + \tfrac{23}{16}\Big\} = 2\big(x+\tfrac{5}{4}\big)^2 + \tfrac{23}{8} \geq \tfrac{23}{8}\,.$$
Logo, $2x^2+5x+6$ nunca se anula pois $2x^2+5x+6 \geq 23/8$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

(c) $$x - 1 - x^2 = -(x^2 - x + 1) = -\Big\{\big(x-\tfrac{1}{2}\big)^2 - \tfrac{1}{4} + 1\Big\} = -\Big\{\big(x-\tfrac{1}{2}\big)^2 + \tfrac{3}{4}\Big\}$$
$$= -\tfrac{3}{4} - \big(x-\tfrac{1}{2}\big)^2 \leq -3/4\,.$$
Portanto, a expressão $x-1-x^2$ nunca se anula pois $x-1-x^2 \leq -3/4$ para todo x real.

(d) $$-2x^2+4x-3 = -2(x^2-2x+\tfrac{3}{2}) = -2\Big\{\big(x-1\big)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}\Big\} = -2\Big\{\big(x-1\big)^2 + \tfrac{1}{2}\Big\}$$
$$= -2\big(x-1\big)^2 - 1 \leq -1.$$
Assim sendo, $-2x^2+4x-3$ nunca se anula já que $-2x^2+4x-3 \leq -1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

21. Sejam a , b , $c \in \mathbb{R}$ onde $a \neq 0$. Mostre que

$$ax^2 + bx + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\} \quad \textbf{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Solução Como $a \neq 0$ podemos escrever

$$ax^2+bx+c = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right\}.$$

Agora, completando quadrados, obtemos:

$$ax^2+bx+c = a\left\{x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}\right\} = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\} = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

para todo número real x, como queríamos demonstrar.

22. Dados $a\,,b \in \mathbb{R}$ sabemos que $(a-b)^2 \geq 0$. Use esse fato para concluir que $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Solução Desenvolvendo a expressão $(a-b)^2$ obtemos:

$$(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2-2ab+b^2 \geq 0 \iff a^2+b^2 \geq 2ab$$

demonstrando o que foi proposto.

23. Sejam $a\,,b \in [\,0\,,\infty)$. Use o exercício 22 para concluir[1] que $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b}$.

Solução Trocando a por $\sqrt{a}$ e b por $\sqrt{b}$ no exercício 22 concluímos que

$$\left(\sqrt{a}\,\right)^2 + \left(\sqrt{b}\,\right)^2 \geq 2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,.$$

Como $a\,,b \geq 0$, segue que $\left(\sqrt{a}\,\right)^2 = a$ e $\left(\sqrt{b}\,\right)^2 = b$. Assim, $a+b \geq 2\sqrt{a\,b}$ e conseqüentemente,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b} \quad \text{quando} \quad a\,,b \geq 0\,.$$

24. Use o método de completar quadrados para mostrar que $x^4-2x^2+2 \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução Completando quadrados na expressão x^4-2x^2+2 obtemos

$$x^4-2x^2+2 = (x^2-1)^2-1+2 = (x^2-1)^2+1 \geq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,,$$

demonstrando o que pretendíamos.

25. Complete quadrados nas expressões a seguir para descobrir onde tais expressões se anulam.
(a) x^2-x-1 (b) x^2+2x-3 (c) $2x^2+x-1$.

Solução Completando quadrados, obtemos:

(a) $x^2-x-1 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{4} = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}\,.$

Logo, a expressão do item (a) se anula quando, e somente quando:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \iff x-\frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

(b) $x^2+2x-3 = (x+1)^2-1-3 = (x+1)^2-4\,.$

Assim, essa expressão se anula se, e somente se:

$$(x+1)^2 = 4 \iff x+1 = \pm 2 \iff x = -1 \pm 2 \iff x = -3 \text{ ou } x = 1\,.$$

[1]Dados números reais $a\,,b \geq 0$ dizemos que $(a+b)/2$ é a *média aritmética* desses números e que $\sqrt{ab}$ é a sua *média geométrica*. Esse exercício mostra que para dois números reais não negativos, sua média aritmética é maior ou igual a sua média geométrica.

(c) $2x^2+x-1=\left(\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{8}-1=\left(\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{9}{8}\,.$

conseqüentemente, o anulamento da expressão se dará apenas quando:

$$\left(\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{8}\iff\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}\iff x+\frac{1}{4}=\pm\frac{3}{4}$$
$$\iff x=\frac{-1\pm 3}{4}\iff x=-1 \text{ ou } x=1/2\,.$$

26. **Dados $a\,,b\in\mathbb{R}$ temos que $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Use esse fato para mostrar que**

$$\sqrt{a^2+b^2}\le a+b \quad \textbf{sempre que} \quad a\,,b\ge 0\,.$$

Solução Se $a\,,b\ge 0$ então $2ab\ge 0$ e, conseqüentemente, segue de $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ que $(a+b)^2\ge a^2+b^2$, ou seja, $0\le a^2+b^2\le(a+b)^2$. Logo[2],

$$\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{(a+b)^2}=a+b \quad \text{pois} \quad a\,,b\ge 0\,,$$

concluíndo o que pretendíamos.

27. **Use o exercício anterior para mostrar que $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}$ quaisquer que sejam $a\,,b\ge 0$.**

Solução Como $a\,,b\ge 0$ segue que $\sqrt{a}\,,\sqrt{b}$ estão bem definidos e $\sqrt{a}\,,\sqrt{b}\ge 0$. Assim, trocando a por $\sqrt{a}$ e b por $\sqrt{b}$ no exercício anterior, concluímos, imediatamente, que

$$\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \text{para todo} \quad a\,,b\ge 0\,.$$

28. **Determine os valores de λ para os quais $2x^2-3x+\lambda\ge 2$ para todo $x\in\mathbb{R}$.**

Solução Completando quadrados, obtemos:

$$2x^2-3x+\lambda=2\left[x^2-\frac{3}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{\lambda}{2}\right]$$
$$=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{8\lambda}{16}\right]=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{8\lambda-9}{8}\quad,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}\,.$$

Portanto,

$$2x^2-3x+\lambda\ge 2\quad,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}\iff 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{8\lambda-9}{8}\ge 2\quad,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}$$
$$\iff\frac{8\lambda-9}{8}\ge 2\iff 8\lambda\ge 25\iff\lambda\ge 25/8\,.$$

[2] Trocando a por $|a|$ e b por $|b|$ podemos concluir que:

$$\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|\quad,\ \forall\,a\,,b\in\mathbb{R}\,.$$

29. **Use o artifício de completar quadrados para mostrar que $4x^2 + 4x + 4 \geq 3$ para todo real x. Mostre também que a igualdade ocorre se, e somente se $x = -1/2$.**

Solução Completando quadrados, como sugerido, temos:

$$4x^2 + 4x + 4 = (2x+1)^2 - 1 + 4 = (2x+1)^2 + 3 \geq 3 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

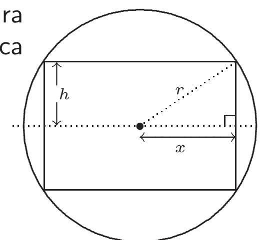
demonstrando a primeira parte do exercício. Além disso, as igualdades acima também mostra que

$$4x^2 + 4x + 4 = 3 \iff (2x+1)^2 + 3 = 3 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -1/2$$

como queríamos mostrar.

30. **Um retângulo está inscrito num círculo de raio $r > 0$. Mostre que sua área é menor ou igual a $2r^2$. Mostre também que a área desse retângulo assume o valor $2r^2$ apenas quando o retângulo for um quadrado.**

Solução Consideremos um retângulo inscrito num círculo, como mostrado na figura ao lado. Sua área A vale: $2x \times 2h$. Como o triângulo mostrado na figura é retângulo, segue do Teorema de Pitágoras que $h^2 = r^2 - x^2$. Sua área A fica então dada por: $A = 2x \times 2\sqrt{r^2 - x^2}$ para todo $x \in (0\,, r)$. Assim,



$$A^2 = 16x^2(r^2 - x^2) = -16(x^4 - r^2x^2) = -16\left\{\left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 - \frac{r^4}{4}\right)\right\}$$

$$= 16\left\{\frac{r^4}{4} - \left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2\right\} = 4r^4 - 16\left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 \leq 4r^4\,.$$

conseqüentemente[3], $A \leq 2r^2$.

☛ **Nota:** Repare que não incluímos as extremidades do intervalo de variação da variável x pois, para esses valores de x o retângulo não está definido.

Passemos agora, à segunda parte do exercício.

Voltando às igualdades anteriores, temos:

$$A = \sqrt{16x^2(r^2 - x^2)} = \sqrt{4r^4 - 16\left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2} \quad , \quad \text{para todo } x \in (0\,, r)\,.$$

Assim, a área A do retângulo assume o maior valor possível, ou seja, $\sqrt{4r^4} = 2r^2$ quando, e somente quando

$$16\left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 = 0 \iff x^2 = \frac{r^2}{2}\,.$$

Como $x > 0$, isso só ocorre quando $x = r/\sqrt{2}$. Além disso, quando $x = r/\sqrt{2}$ o retângulo correspondente tem lados:

$$l_1 = 2x = r\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad l_2 = 2h = 2\sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{2}$$

[3]Note que $2r^2 < \pi r^2 =$ área do disco de raio r.

sendo assim um quadrado, o que finaliza a solução.

☛ **Nota:** Esse exercício não só mostra que $2r^2$ é uma majoração para áreas de retângulos inscritos em círculos de raio r como também mostra que essa é a *melhor majoração* possível. *Melhor majoração* no seguinte sentido: qualquer outro número real que seja maior ou igual a área de qualquer retângulo inscrito num círculos de raio r também é maior ou igual a $2r^2$. Ou seja, $2r^2$ é a menor das majorações.

Dito de outra forma, nós acabamos de mostrar que dentre todos os retângulos inscritos num círculo de raio r o de maior área é o quadrado de lado $r\sqrt{2}$. Você pode formular esse mesmo tipo de exercício para outras figuras geométricas. Em Cálculo I, você abordará esse mesmo problema com uma técnica bem mais poderosa do que a de completar quadrados.

31. **Um objeto desloca-se no espaço de tal forma que sua distância d ao planeta Terra, em cada instante t, é dada por $d = \sqrt{4t^4 - 2kt^2 + k^2}$ onde t é dado em horas, d é obtida em km e k é uma constante positiva. Mostre que esse objeto estará sempre a uma distância não inferior a $k\sqrt{3}/2$. Mostre também que essa distância mínima é assumida se, e somente se, $t = \pm\sqrt{k}/2$.**

Solução Para a primeira parte do exercício devemos mostrar que $\sqrt{4t^4 - 2kt^2 + k^2} \geq k\sqrt{3}/2$.

Para isso, completanto quadrados na expressão $4t^4 - 2kt^2 + k^2$, obtemos:

$$d = \sqrt{4t^4 - 2kt^2 + k^2} = 2\sqrt{t^4 - \frac{k}{2}t^2 + \frac{k^2}{4}} = 2\sqrt{\left(t^2 - \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{k^2}{16} + \frac{4k^2}{16}} = 2\sqrt{\left(t^2 - \frac{k}{4}\right)^2 + \frac{3k^2}{16}}\,.$$

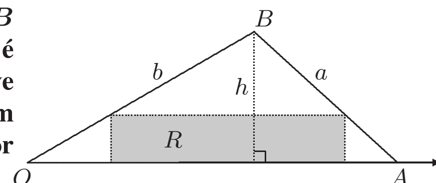
conseqüentemente, $d \geq 2\sqrt{\dfrac{3k^2}{16}} = \dfrac{k\sqrt{3}}{2}$.

Das igualdades acima, temos:

$$d = \sqrt{4t^4 - 2kt^2 + k^2} = \sqrt{4\left(t^2 - \frac{k}{4}\right)^2 + \frac{3k^2}{16}} \quad , \quad \text{para todo } t \text{ real}\,.$$

Portanto, a distância d assume o valor $\sqrt{\frac{3k^2}{4}}$ se, e somente se $t^2 = k/4$ ou seja, quando $t = \pm\sqrt{k}/2$.

32. **Considere o triângulo OAB de lados a, b, c onde o vértice B se projeta ortogonalmente sobre o lado OA. Um retângulo R é inscrito nesse triângulo como mostrado na figura ao lado. Prove que sua área $\mathcal{A}$ satisfaz a condição $\mathcal{A} \leq hc/4$. Prove também que a igualdade ocorre se, e somente se, a altura do retângulo for a metade da altura h do triângulo.**



Solução Para resolver esse problema vamos expressar a área do retângulo em termos da variável x que representa a distância do vértice O do triângulo ao vértice inferior esquerdo do retângulo, como mostrado na próxima figura.

No triângulo OAB o lado OA mede c e a altura em relação a esse lado OA é denotada por h.

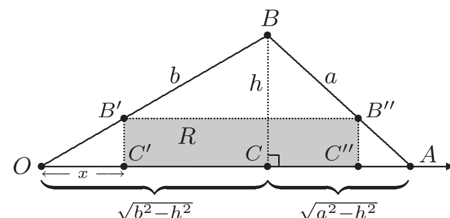
Da semelhança dos triângulos $OC'B'$ e OCB segue[4] que:

[4] Aqui, $|XY|$ denota o comprimento do segmento de reta de X até Y.

$$\frac{|C'B'|}{h} = \frac{x}{\sqrt{b^2 - h^2}}\,.$$

Da semelhança dos triângulos $AC''B''$ e ACB temos:

$$\frac{|C''B''|}{h} = \frac{|AC''|}{\sqrt{a^2 - h^2}}\,.$$



Como $|C''B''| = |C'B'|$, segue que a área $\mathcal{A}$ do retângulo $C'C''B''B'$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \big(c - x - |AC''|\big)|C'B'| = \left\{c - x - \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}\,x\right\}\frac{hx}{\sqrt{b^2-h^2}} \\
&= \left\{c - \left(1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}\right)x\right\}\frac{hx}{\sqrt{b^2-h^2}} = \frac{h}{\sqrt{b^2-h^2}}\left\{cx - \left(1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}\right)x^2\right\} \\
&= \frac{h}{\sqrt{b^2-h^2}}\left\{cx - \left(1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}\right)x^2\right\} \\
&= \frac{h}{\sqrt{b^2-h^2}}\left\{\frac{c^2}{4\Big(1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}\Big)} - \left(x\sqrt{1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}} - \frac{c}{2\sqrt{1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}}}\right)^2\right\}.
\end{aligned}$$

conseqüentemente,

$$\mathcal{A} \le \frac{h}{\sqrt{b^2-h^2}}\,\frac{c^2}{4 + 4\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}} = \frac{h}{\sqrt{b^2-h^2}}\,\frac{c^2\sqrt{b^2-h^2}}{4\sqrt{a^2-h^2} + 4\sqrt{b^2-h^2}} = \frac{h\,c}{4}\,.$$

Além disso, $\mathcal{A} = hc/4$ quando, e somente quando,

$$\begin{aligned}
x\sqrt{1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}} - \frac{c}{2\sqrt{1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}}} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\sqrt{1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}} = \frac{c}{2\sqrt{1 + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}}} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{b^2-h^2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Nesse caso, a altura $|C'B'|$ do retângulo vale

$$|C'B'| = \frac{hx}{\sqrt{b^2-h^2}} = \frac{h\sqrt{b^2-h^2}}{2\sqrt{b^2-h^2}} = h/2\,.$$

Portanto, $\mathcal{A} = hc/4$ quando, e somente quando a altura do retângulo for a metade da altura do triângulo.

Exercícios

1. Desenvolva as expressões:
   (1) $x(2x-1)$
   (2) $(1-|x|)x+1$
   (3) $1-(x-1)x^2$
   (4) $(1+x)(1-2x^2)$
   (5) $(2-3x)(x-2)(1-2x)$
   (6) $(1-|x|)(3|x|-2)$
   (7) $x(2+3x)(2-x^2)$
   (8) $(x^2-5)(2x^2+4)$
   (9) $x(2+x)^2$
   (10) $x^2(2-3x)^3$.

2. Fatore as expressões:
   (1) x^2-2x
   (2) $x-x^2$
   (3) x^2-2
   (4) $1-4x^2$
   (5) $2-3x^2$
   (6) $2z^3-3z^2$
   (7) x^2-3x^4
   (8) x^2+2x^3
   (9) $(x-1)^2-x+1$
   (10) $1-|x|+(|x|-1)^2$
   (11) $x^4+2x^3-x^2$.

3. Coloque em evidência na expressão dada, o fator indicado.
   (1) Expressão: x^2-x
   Fator: x^2
   (2) Expressão: x^2-x
   Fator: $1/x$
   (3) Expressão: x^2-x
   Fator: x^4
   (4) Expressão: $2x^5-x^3+x+2$
   Fator: x^5
   (5) Expressão: $2x^5-x^3+x+2$
   Fator: $2/x^2$
   (6) Expressão: $x-2x^3+x^5-x^7$
   Fator: $-x^7$
   (7) Expressão: $2x^6-x^3+x^2+2$
   Fator: $-2x^6$
   (8) Expressão: $1/x+2/x^2$
   Fator: $1/x^2$
   (9) Expressão: $1/x^4-1/x^2+3/x-2$
   Fator: $1/x^4$.

4. Identifique os produtos notáveis na lista a seguir.
   (1) $2z^2-3$
   (2) $4x^2+4x+1$
   (3) $4-12x+9x^2$
   (4) $1+2x^2+x^4$
   (5) $9-6x^3+x^6$
   (6) $2z^3+3$
   (7) $1-3t^3$
   (8) $8w^3+36w^2+54w+27$
   (9) $1-3z^2+3z^4-z^6$
   (10) $1/x^2-2$
   (11) $8-1/x^3$
   (12) $8/x^3+1$.
   (13) $|x|^3-1$

5. Complete quadrados nas expressões a seguir.
   (1) x^2-3x
   (2) $2-3x^2$
   (3) $2x^2-x+2$
   (4) z^2+3z+2
   (5) $2-2|x|+x^2$
   (6) $2x^2+|x|+1$
   (7) z^2-2z+3
   (8) w^2+aw+1 onde $a\neq 0$
   (9) $2-t/a-3t^2$ onde $a\neq 0$
   (10) x^6+x^3-3
   (11) $1/x^2+1/x-1$.

6. Seja $a\in\mathbb{R}$. Mostre que:
$$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3).$$

7. Seja $a\in\mathbb{R}$. Mostre que:
$$x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4).$$

8. Formule um exercício semelhante ao anterior, trocando o expoente 5 por 7. Demonstre a identidade que você propõe.

9. Generalize o resultado do exercício 7 para um expoente inteiro positivo qualquer. Prove a generalização que você propõe.

10. Use o resultado do exercício 6 para mostrar que
$$x^4-a^4=(x+a)(x^3-ax^2+a^2x-a^3).$$

11. Use o resultado do exercício 7 para mostrar que

$$x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4).$$

12. Generalize o resultado do exercício 11 para um expoente inteiro positivo qualquer. Prove a generalização que você propõe.

13. Sejam $a\,, b \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2).$$

14. Use o resultado apresentado no exercício anterior para concluir que

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(3b^2 + a^2)$$

quaisquer que sejam $a\,, b \in \mathbb{R}$.

15. Resolva as seguintes equações.
(1) $x(1+2x^2) = 0$
(2) $(x-2)(3+x) = 0$
(3) $(2x-1)(|x|-3) = 0$
(4) $x^2(x^3-3) = 0$
(5) $(x^2-4)(3-x) = 0$
(6) $(2x-x^2)(2-|x-1|) = 0$
(7) $(x^3-8)(2+x^3) = 0$
(8) $(1-2x)(2-1/x) = 0$
(9) $(|x|-2)\sqrt{x} = 0$
(10) $(3-x^2)(x-|x|) = 0$
(11) $(2+x^3)(2-3x)^2 = 0$
(12) $x^5(2x-3x^3)^2 = 0$
(13) $(3-2/x)^3(x^2+1)x = 0$
(14) $(3x-1)^4(2x^2-1)^3(4-|x|)^2 = 0$
(15) $(2-1/x)^2(x-x^2) = 0$
(16) $(x-1)^3(1/|x|-1)(x-x^3) = 0$
(17) $(2-1/|1-x|)(x^3-1) = 0$
(18) $(2-\sqrt{x-1}\,)(1+x) = 0$
(19) $(\sqrt{2x}+1)^2(4-x^2)^3(3-1/|x-2|) = 0$
(20) $(x-3x^4)(\sqrt{x-1}-2)^2(5-x^2)^3 = 0\,.$

16. Defina $a*b := \dfrac{a\,b}{a+b}$. Qual o domínio da expressão $E(x) = \dfrac{1-x*x}{2*x}$?

17. Seja $a \in \mathbb{R}$. Use o exercício 16 da lista de *Exercícios Resolvidos* para mostrar que: $a^4 = 1$ quando, e somente quando $a = \pm 1$.

18. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $x^4 = b$. Apresente uma solução similar àquela que fizemos no exercício 18 da lista de *Exercícios Resolvidos*.

19. Completando quadrados na expressão x^2+x+1 mostramos que ela é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Vejamos:

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= (x+1/2)^2 - 1/4 + 1 \\ &= (x+1/2)^2 + 3/4 > 0 \end{aligned}$$

Outra forma de mostrar esse fato, é o seguinte:

(i) Para $x \geq 0$ temos que

$$x^2+x+1 \geq 1 > 0\,;$$

(ii) Para $x \in (-\infty\,, -1]$ temos que

$$\underbrace{x\,(x+1)}_{\geq 0} + 1 \geq 1 > 0\,;$$

(iii) Para $x \in (-1\,, 0)$ temos que

$$x^2 + \underbrace{(x+1)}_{>0} > 0\,.$$

De (i), (ii) e (iii) concluímos que x^2+x+1 é positivo para todo x real.

Use os artifícios acima para mostrar que

$$x^4+x^3+x^2+x+1 > 0\ , \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

20. Use o exercício anterior para mostrar que a equação $x^5 = 1$ tem, de fato, uma única solução, a saber, a solução $x = 1$. Faça isso, fatorando $x^5 - 1$ como fizemos no exercício 7.

21. Seja $b \in \mathbb{R}$. Use o exercício anterior para mostrar que a equação $x^5 = b$ tem, de fato, uma única solução, a saber, a solução $x = \sqrt[5]{b}$.

22. A expressão $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ é sempre positiva ?

23. Mostre que

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+x+1)(x^3+1)\,.$$

Use esse resultado para determinar onde a expressão $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

- se anula ;
- é positiva ;
- é negativa .

24. Generaliza o exercício 19. Demonstre o resultado que você propõe como generalização.

25. Fatore as expressões:
(a) $2x^3 - 1$
(b) $8 + z^3$
(c) $4 - |z|^3$
(d) $x^4 - 9$
(e) $1 - x^7$
(f) $1/x^2 - 2/x^4$.
(g) $z^8 - 1$
(h) $8x^4 - x^7$
(i) $x^7 - x$
(j) $1/x^5 - 9/x$
(k) $1/x^3 + 8$.

26. Complete quadrados nas expressões a seguir.
(a) $1/x^2 - 2/x + 1$
(b) $1/x - 4/x^2$
(c) $1 - 2/x - 1/x^2$
(d) $4/x^4 - 1/x^2$
(e) $1 + 1/|x| - 1/x^2$
(f) $x^4 + x^2 - 2$
(g) $1 - x^3 - x^6$
(h) $x^8 - 4x^4 - 4$
(i) $3/x^6 - 1/x^3$
(j) $x - 2\sqrt{x} - 1$
(k) $1/x + 1/\sqrt{x} + 2$.

27. Mostre que as igualdades a seguir são verdadeiras.
(a) $1 - x = (1 + \sqrt{x}\,)(1 - \sqrt{x}\,) \ , \ \forall\, x \geq 0$
(b) $1 - |x| = (1 + \sqrt{|x|}\,)(1 - \sqrt{|x|}\,) \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$
(c) $x - 1 = (\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1) \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

28. Identifique os produtos notáveis.
(a) $2/x^2 - 9$
(b) $1/x^3 - 3/x^2 + 3/x - 1$
(c) $1 - 3/x^2 + 3/x^4 - 1/x^6$
(d) $2/x^4 - 1$.

29. Qual o menor número real que devemos adicionar a expressão $4x^2 - 4x - 2$ para que ela não assuma valores negativos ?

30. Complete quadrado na expressão $1/x^2 - 2/x - 3$ para determinar onde ela se anula.

31. Complete quadrado na expressão $4/x^2 - 4/x + 2$ para mostrar que $4/x^2 - 4/x + 2 \geq 1$ para todo real $x \neq 0$.

32. Mostre que o perímetro de um retângulo inscrito num círculo é maior ou igual a quatro vêzes o raio do círculo. Como sugestão, volte à figura do exercício 30 e use a desigualdade triangular.

33. Volte ao exercício 23 da lista de *Exercícios Resolvidos* para responder as seguintes perguntas.

(i) Quando é que a média aritmética de dois números reais positivos é maior do que a sua média geométrica ?

(ii) Quando é que a média aritmética de dois números reais positivos é igual a sua média geométrica ?

34. Sejam $a\,, b \in [\,0\,, \infty)$. Pergunta-se: quando é que $\sqrt{a^2 + b^2}$ é igual a $a + b$?

35. Sejam $a\,, b \in \mathbb{R}$. Pergunta-se: quando é que $\sqrt{a^2 + b^2}$ é igual a $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$?

36. Sejam $a\,, b > 0$. Mostre que nesse caso temos que
$$\sqrt{a^2 + b^2} < a + b\,.$$

37. Mostre que $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ quaisquer que sejam $a\,, b \in \mathbb{R}$.

38. Sejam $a\,, b \geq 0$. Mostre que
$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} \leq a + b\,.$$

39. Use o exercício anterior para mostrar que
$$\sqrt[3]{a + b} \leq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \quad \text{quando} \quad a\,, b \geq 0\,.$$

40. Proponha exercícios similares aos dois anteriores, trocando 3 por 4 , e resolva-os.

41. Use a técnica de completar quadrados para determine os valores de λ para os quais a expressão $2x^2 + x - \lambda$ se anula em um único ponto.

42. Use a técnica de completar quadrados para determinar todos os valores de λ para os quais e expressão $x^4 - 3x^2 + \lambda$ nunca se anula.

43. Repita o exercício anterior para a expressão

$$3x^2 - \lambda\, x + 2\,.$$

44. Determine os valores de λ para os quais a expressão $2/x^2 - \lambda/x + \lambda$ é positiva para todo $x \neq 0$.

45. Faça um desenvolvimento similar ao que fizemos no exercício 19 dessa lista de *Exercícios*, para mostrar que a expressão $x^2 + ax + a^2$ nunca se anula quando $a \neq 0$. Adapte os seus argumentos para mostrar que a expressão $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$ também nunca se nula quando $a \neq 0$. Generalize esse resultado e prove sua generalização.

5

Operando com frações

Lembramos que uma *fração* é uma expressão da forma $\dfrac{a}{b}$, onde a e b são números reais e $b \neq 0$. Exemplos de frações:

$$\frac{5}{2} \quad ; \quad \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7} \quad ; \quad \frac{3}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{5}}{-3} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad ; \quad \frac{\pi}{8} \quad ; \quad \frac{1{,}257}{6{,}7}\,.$$

1 Igualdade

Sejam $\boldsymbol{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d \in \mathbb{R}}$ **com** $\boldsymbol{b \neq 0}$ **e** $\boldsymbol{d \neq 0}$ **:**

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \times d = b \times c\,.}$$

Essa propriedade pode ser demonstrada sem dificuldades, a partir das propriedades das operações de adição e multiplicação, vistas na lição anterior.

Exemplos

❄ $\dfrac{4}{5} = \dfrac{20}{25}$ pois $4 \times 25 = 5 \times 20\,;$

❄ $\dfrac{72}{108} = \dfrac{2}{3}$ pois $72 \times 3 = 108 \times 2\,;$

❄ $\dfrac{1{,}3}{2} = \dfrac{5{,}2}{8}$ pois $1{,}3 \times 8 = 2 \times 5{,}2$;

❄ $\dfrac{\sqrt{2}}{3} = \dfrac{2}{3\sqrt{2}}$ pois $3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3 \times 2$;

2 Simplificação

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ e $c \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c \times a}{c \times b}.$$

Note que a igualdade acima segue imediatamente do resultado anterior. Para ver isso, basta observar que: $a \times c \times b = b \times c \times a$.

Exemplos

❄ $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$;

❄ $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$;

❄ $\dfrac{2}{\sqrt{5} + 1} = \dfrac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \dfrac{2(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$;

❄ Quando $x \neq 0$ temos: $\dfrac{x}{x} = 1$; $\dfrac{x^2}{x} = x$; $\dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$;

❄ $\dfrac{x^2 - x}{1 - x} = \dfrac{x(x-1)}{1-x} = -\dfrac{x(x-1)}{x-1} = -x$ quando $x \neq 1$;

❄ $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2} = \dfrac{x^2(x - 2 + 1/x^2)}{x^2(1 - 2/x^2)} = \dfrac{x - 2 + 1/x^2}{1 - 2/x^2}$ quando $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2} \right\}$;

❄ Quando $x > 0$ temos que $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{x} = 1$;

❄ Quando $x < 0$ temos que $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{-x} = -\dfrac{x}{x} = -1$.

3 Operações

Regras de cálculo para frações

Para $b\,,d\neq 0$ temos:

- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}+\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad+bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}-\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad-bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ • $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$
- $\left(\dfrac{c}{d}\right)^{-1}=\dfrac{d}{c}$ **quando** $c\neq 0$.
- $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$ **quando** $c\neq 0$.

Importante: Lembre-se sempre dos seguintes fatos:

☞ Para somar ou subtrair frações, devemos *reduzí-las a um mesmo denominador*. É o que fazemos na tabela ao lado.

☞ Para inverter uma fração precisamos que o numerador e o denominador sejam, ambos, não nulos.

☞ Na divisão de frações, é essencial que a fração divisora seja não nula. Isto é, se estamos dividindo um número real pela fração c/d devemos ter $d\neq 0$ para que a fração esteja bem definida e, evidentemente, também devemos ter $c\neq 0$ para que a fração em questão não se anule.

Essas propriedades podem ser demonstradas sem dificuldades a partir das propriedades já estudadas.

A divisão de $\dfrac{a}{b}$ por $\dfrac{c}{d}$ também é denotada por $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ou $\dfrac{a/b}{c/d}$. Assim, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{a/b}{c/d}$.

Exemplos

❄ $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\times 3}{5\times 3}+\dfrac{5\times 1}{5\times 3}=\dfrac{9+5}{15}=\dfrac{14}{15}$.

❄ $\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{5\times 7}{4\times 7}-\dfrac{4\times 1}{4\times 7}=\dfrac{35-4}{28}=\dfrac{31}{28}$.

❄ $\dfrac{a}{3}+\dfrac{3}{b}=\dfrac{a\times b}{3\times b}+\dfrac{3\times 3}{3\times b}=\dfrac{ab+9}{3b}$ se $b\neq 0$.

❄ $\dfrac{2}{k}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2\times 5}{k\times 5}-\dfrac{k\times 3}{k\times 5}=\dfrac{10-3k}{5k}$ se $k\neq 0$.

❄ $\dfrac{2}{5}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\times 6}{5\times 6}-\dfrac{5\times\pi}{5\times 6}=\dfrac{12-5\pi}{30}$.

❄ $\dfrac{2{,}2}{3}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{2{,}2\times 5}{3\times 7}=\dfrac{11}{21}$.

❄ $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{(-3)}{4}=\dfrac{2\times(-3)}{5\times 4}=\dfrac{-6}{20}=-\dfrac{6}{20}=-\dfrac{3}{10}$.

❄ $\dfrac{3}{5}\div\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\times\sqrt{3}}{5\times 2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{10}$.

❄ $\dfrac{2}{b}\times\dfrac{2-b}{3}=\dfrac{2(2-b)}{3b}$ se $b\neq 0$.

❄ $\dfrac{3{,}2}{4}\div 3=\dfrac{3{,}2}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3{,}2}{4\times 3}=\dfrac{0{,}8}{3}=\dfrac{8}{30}=\dfrac{4}{15}$.

❄ $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{-1}=\dfrac{4}{\pi}$

❄ $\left(-\dfrac{x+1}{3}\right)^{-1}=-\dfrac{3}{x+1}$ quando $x\neq -1$

Exercícios resolvidos

1. **Calcule:**

(a) $\left(\frac{3}{5}-2\right)\times\frac{2}{3}$ **(b)** $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\div\frac{2{,}2}{3}$ **(c)** $\frac{0{,}5}{2}\div\left(\frac{3}{5}-2\times\frac{1}{3}\right)$ **(d)** $1{,}2\times\frac{10}{3}-\frac{2}{7}$.

Solução Usando as regras que acabamos de estudar, temos:

(a) $\left(\frac{3}{5}-2\right)\times\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{5}-\frac{10}{5}\right)\times\frac{2}{3}=-\frac{7}{5}\times\frac{2}{3}=-\frac{14}{15}$.

(b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\div\frac{2{,}2}{3}=\left(\frac{5}{15}+\frac{6}{15}\right)\times\frac{3}{2{,}2}=\frac{11}{15}\times\frac{30}{22}=\frac{11\times3\times5\times2}{3\times5\times2\times11}=1.$

(c) $\frac{0{,}5}{2}\div\left(\frac{3}{5}-2\times\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{10\times2}\div\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}\div\left(\frac{9}{15}-\frac{10}{15}\right)=-\frac{1}{4}\div\frac{1}{15}=-\frac{1}{4}\times15=-\frac{15}{4}$.

(d) $1{,}2\times\frac{10}{3}-\frac{2}{7}=\frac{12}{10}\times\frac{10}{3}-\frac{2}{7}=4-\frac{2}{7}=\frac{28}{7}-\frac{2}{7}=\frac{26}{7}$.

2. **Escreva as expressões a seguir na forma de uma fração com denominador inteiro.**

(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ **(b)** $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **(c)** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ **(d)** $\frac{2}{10+3\sqrt{6}}$.

Solução Simplificando as expressões temos:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}$.

(b) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-3+\sqrt{6}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}-3+\sqrt{6}$.

(c) Usando a identidade $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ obtemos:

$$2-1=(\sqrt[3]{2}\,)^3-1=(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1).$$

Portanto, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$.

(d) $\frac{2}{10+3\sqrt{6}}=\frac{2(10-3\sqrt{6})}{(10+3\sqrt{6})(10-3\sqrt{6})}=\frac{2(10-3\sqrt{6})}{100-54}=\frac{10-3\sqrt{6}}{23}$.

3. **Reduza a um denominador comum as seguintes expressões:**

(a) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$ **(b)** $\frac{A}{x-5}+\frac{B}{3+x}$.

Solução Para iniciar os cálculos devemos fazer as restrições necessárias aos denominadores.

(a) Para $x \neq 0$ e $x \neq 1$ as frações a seguir estão bem definidas e temos:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)}{x(x-1)} + \frac{Bx}{x(x-1)} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}\,.$$

(b) Para $x \neq 5$ e $x \neq -3$ as frações a seguir estão bem definidas e temos:

$$\frac{A}{x-5} + \frac{B}{3+x} = \frac{A(3+x)}{(x-5)(3+x)} + \frac{B(x-5)}{(3+x)(x-5)} = \frac{(A+B)\,x + 3A - 5B}{(3+x)(x-5)}\,.$$

4. **Sabendo que $a \neq \pm b$, simplifique a expressão $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} - \dfrac{a^2}{a^2-b^2}$.**

Solução Quando $a \neq \pm b$ cada parcela da expressão acima está bem definida e temos:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} &= \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{b(a+b)}{a^2-b^2} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a(a-b)+b(a+b)-a^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2-ab+ab+b^2-a^2}{a^2-b^2} = \frac{b^2}{a^2-b^2}\,.\end{aligned}$$

5. **Simplifique $\dfrac{x^2-4}{x^3-8}\Big/\dfrac{x^2-x}{x^3+2x^2+4x}$.**

Solução Fatorando numeradores e denominadores das frações acima, temos que:

- $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
- $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$
- $x^2 - x = x(x-1)$
- $x^3 + 2x^2 + 4x = x(x^2+2x+4)\,.$

Além disso, completando quadrados, temos que:

$$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 - 1 + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0\,.$$

Assim, para que o quociente em questão esteja bem definido devemos ter:

- $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4) \neq 0$ ou seja, $x \neq 2$ já que $x^2+2x+4 > 0$;
- $x^3 + 2x^2 + 4x = x\,(x^2+2x+4) \neq 0$ ou seja, $x \neq 0$;
- $x^2 - x = x(x-1) \neq 0$ ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

Agora, para $x \neq 0\,,1\,,2$ podemos efetuar as simplificações pretendidas, obtendo:

$$\frac{x^2-4}{x^3-8} \div \frac{x^2-x}{x^3+2x^2+4x} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \times \frac{x\,(x^2+2x+4)}{x\,(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}\,.$$

6. **Determine o domínio das expressões a seguir e simplifique-as:**

(a) $\dfrac{1}{2+x\sqrt{x}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}$.

Solução Vamos começar determinando o domínio de definição das expressões em questão.

(a) Nesse caso devemos ter $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ esteja bem definida. Nessas condições, $2+x\sqrt{x}$ não se anula e o domínio da expressão do item (a) é o intervalo $[0,\infty)$. Agora, buscando uma simplificação para a expressão

$$\frac{1}{2+x\sqrt{x}}$$

vamos multiplicar o numerador e o denominador por $2-x\sqrt{x}$. Para isso precisamos excluir os pontos do intevalo $[0,\infty)$ onde $2-x\sqrt{x}$ se anula.

Para $x \geq 0$ temos:

$$2-x\sqrt{x}=0 \iff \frac{(2+x\sqrt{x})(2-x\sqrt{x})}{2+x\sqrt{x}}=0 \iff \frac{4-x^3}{2+x\sqrt{x}}=0 \iff x=\sqrt[3]{4}\,.$$

Portanto, para $x \geq 0$ e $x \neq \sqrt[3]{4}$ podemos efetuar as operações a seguir, obtendo a simplificação:

$$\frac{1}{2+x\sqrt{x}}=\frac{2-x\sqrt{x}}{(2+x\sqrt{x})(2-x\sqrt{x})}=\frac{2-x\sqrt{x}}{4-x^3}\,.$$

(b) Aqui devemos ter:

- $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ esteja bem definida.
  Nesse caso, $\sqrt{1+\sqrt{x}}$ está bem definido e é maior ou igual a 1.
- $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \neq 0$.
  Para $x \geq 0$ temos que:

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=0 \iff \frac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1)}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}=0$$

$$\iff \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1} \iff x=0$$

Dessa análise, concluímos que o domínio da expressão é o intervalo $(0,\infty)$.

Agora, para $x>0$ temos a simplificação:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1)}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}\,.$$

.

7. **Simplifique as expressões:**

(a) $\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ **onde** $a \geq 0$ (b) $\dfrac{x-a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ **onde** $a \in \mathbb{R}$.

Solução Comecemos com a análise do domínio das expressões.

(a) Aqui devemos ter $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ esteja bem definido. Além disso, devemos ter $x \neq a$ para que o denominador não se anule. Assim, o domínio da expressão é o conjunto $\{x \in [0\,,\infty)\ ;\ x \neq a\}$.

Nessas domínio, $\sqrt{x} + \sqrt{a} > 0$ e a expressão em questão tem a forma:

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{x-a} = \sqrt{x}+\sqrt{a}\,.$$

(b) Aqui a expressão a ser estudada está bem definida para todo $x \neq a$. Para simplificá-la, consideremos o seguinte produto notável:

$$x - a = (\sqrt[3]{x}\,)^3 - (\sqrt[3]{a}\,)^3 = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\,)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}\,)\,.$$

Daí, para $x \neq a$ segue que:

$$\frac{x-a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}\,.$$

8. **Simplifique as expressões a seguir e explicite para quais valores de x as igualdades obtidas são verdadeiras.**

(a) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ **(b)** $\dfrac{x-x^3}{x^2+x}$ **(c)** $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ **(d)** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x+1}$ quando $x \neq \pm 1$.

(b) $\dfrac{x-x^3}{x^2+x} = \dfrac{x(1-x^2)}{x(x+1)} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{x+1} = 1-x$ desde que $x \in \mathbb{R} - \{0\,,-1\}$.

(c) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$ quando $x \in \mathbb{R} - \{1\,,2\}$

(d) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ se $x \geq 0$ e $x \neq 2$.

9. **Determine o domínio de definição da expressão** $\dfrac{1}{x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}}}$ **e simplifique-a**.

Solução Vamos determinar quando a expressão não pode ser avaliada.

☞ Quando $x = 0$ pois nesse caso $\dfrac{1}{x}$ não faz sentido ;

☞ Quando $x - \dfrac{1}{x} = 0$ pois nesse caso $\dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}}$ não faz sentido ;

Resolvendo a equação acima, para $x \neq 0$, obtemos:

$x - \dfrac{1}{x} = 0 \iff x = \dfrac{1}{x} \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1 \,.$

☞ Quando $x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}} = 0$ pois nesse caso $\dfrac{1}{x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}}}$ não faz sentido ;

Resolvendo a equação acima, para $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$ obtemos:

$x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}} = 0 \iff x = \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}} \iff x^2 - 1 = 3 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2 \,.$

Assim, o domínio da expressão inicial é o conjunto $\mathbb{R} - \{-2\,, -1\,,\, 0\,,\, 1\,, 2\}$.

Simplificando a expressão para $x \in \mathbb{R} - \{-2\,, -1\,,\, 0\,,\, 1\,, 2\}$ obtemos:

$$\frac{1}{x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}}} = \frac{1}{x - \dfrac{3x}{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x - 3x} = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 4)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x\,(x-2)(x+2)} \,.$$

Exercícios

1. Calcule:
(a) $(\frac{4}{7}+2)\times\frac{3}{5}$
(b) $(\frac{2}{3}-\frac{2}{5})\div\frac{0{,}2}{3{,}1}$
(c) $\frac{1{,}5}{0{,}2}\div(\frac{5}{3}-2{,}1\times\frac{2}{3})$
(d) $2{,}4\times\frac{8}{3}-\frac{3}{5}\div\frac{2}{7{,}4}$
(e) $1{,}02\div\frac{2}{3}+\frac{0{,}3}{1{,}5}$
(f) $3{,}02\div1{,}1\div0{,}02$
(g) $\frac{0{,}2}{3}\div\frac{2}{0{,}01}\div\pi$
(h) $\frac{2}{3{,}2}-\frac{1}{1{,}1}\div\frac{3}{1{,}2}+\frac{5}{3}$
(i) $\left(\frac{0{,}1}{2{,}2}\right)^{-1}$
(j) $\left(\frac{2{,}1}{3{,}6}\right)^{-1}\div\frac{3{,}1}{0{,}2}$

2. Escreva as expressões a seguir na forma de uma fração com denominador inteiro.

(a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}$ (b) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
(c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ (d) $\dfrac{2}{5-2\sqrt{6}}$
(e) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}+1}$ (f) $\dfrac{1}{3-3\sqrt[3]{3}}$
(g) $\dfrac{2}{1+\sqrt[3]{2}}$ (h) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$
(i) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ (j) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

3. Simplifique a expressão
$$\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}.$$

4. Calcule
$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\div\frac{7+4\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}}.$$

5. Coloque as expressões abaixo na forma de uma fração:
(a) $\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)\left(\frac{19}{3}+\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\pi}\div\frac{2\pi}{7}\right)\frac{\pi^2}{\sqrt{5}-1}$
(c) $\frac{\sqrt{3}-2}{\pi^2-1}\left(1-\frac{2}{\pi+1}\right)$ (d) $\pi\,\frac{2-\pi}{1-\frac{2}{\pi}}$.

6. Sabendo que $x/y=5$ simplifique as expressões a seguir.
(a) $\frac{2x}{y}$ (b) $\frac{\pi y}{3x}$
(c) $\frac{x+y}{x-y}$ (d) $\frac{yx-2x^2}{2y}\times\frac{x}{x^2-y^2}$
(e) $\frac{1}{2y}\sqrt{x^2-y^2}$ (f) $\frac{2x-y}{y}$
(g) $\frac{y^2-2x^2}{xy(y^2+1)}$ (h) $(2y^2-3xy)\frac{x+1}{x^2-xy}$.

7. Determine para quais valores reais da variável x, as expressões a seguir *não estão bem definidas*.

(1) x^3-2x+1 (2) $\dfrac{2x}{\pi-3,14}$;
(3) $\dfrac{x}{1-|x|}$ (4) $\dfrac{x}{1+x^2}$;
(5) $\dfrac{1}{1-2x}$ (6) $\dfrac{3x}{1-x^2}$;
(7) $\dfrac{|x|}{2|x|^3-5}$ (8) $\dfrac{x}{x^2(1+x^2)}$.

8. Sejam A e B números reais quaisquer. Reduza a um denominador comum as expressões a seguir e simplifique-as, explicitando o domínio de validade das igualdades obtidas.

(a) $\dfrac{A}{1-x}+\dfrac{B}{x+1}$ (b) $\dfrac{A}{2x-5}-\dfrac{B}{2+3x}$
(c) $\dfrac{x}{4-x^2}-\dfrac{B}{x-2}$ (d) $\dfrac{Ax}{2x-x^2}+\dfrac{B}{3x}$
(e) $\dfrac{Ax+1}{x^3-x}+\dfrac{x-B}{3x}$ (f) $\dfrac{x^2-4}{2x-x^2}+\dfrac{B}{x}$

9. Sabendo que $a\neq\pm b$, simplifique a expressão
$$\frac{b}{a-b}-\frac{a^2}{a^3-b^3}.$$

10. Determine o domínio das expressões a seguir e simplifique-as.

(a) $1-x^2$ (b) $2x-\dfrac{8}{2x+1}$
(c) $\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ (d) $1-\dfrac{27}{x^3-27}$
(e) $\dfrac{1-\dfrac{2}{x-1}}{x^2+3x}$ (f) $\dfrac{x^2-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{x}{|x|}-1}$

(g) $\dfrac{1+\dfrac{2/x}{1-x}}{\dfrac{x-2}{2-\dfrac{x}{1+x}}}$ (h) $\dfrac{\dfrac{2-x^2}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+1}}{1-\dfrac{x^4-1}{x^4-4}}$

(i) $\dfrac{x^2-1}{|x|} \div \dfrac{x+1}{x^2}$ (j) $\dfrac{2y-1}{y-2} - \dfrac{3-\dfrac{2}{y}}{1-\dfrac{3}{y}}$

(k) $\dfrac{x^3-1}{1-\dfrac{1}{x}} \times \dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2+x+1}$

11. Sejam $a\,,\,b\,,\,c \in \mathbb{R}^*$. A afirmação $\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}} = \dfrac{\dfrac{a}{b}}{c}$ é verdadeira ?

12. Sejam $a\,,\,b \in \mathbb{R}^*$ e considere a fração a/b. Diga quais das afirmações são falsas e justifique suas respostas.

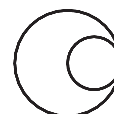
(a) Multiplicando o numerador e o denominador por um mesmo número real não nulo não alteramos o valor da fração ;

(b) Adicionando um mesmo número real ao numerador e ao denominador não alteramos o valor da fração ;

(c) Diminuindo de duas unidades o numerador e o denominador não alteramos o valor da fração ;

(d) Dividindo o numerador e o denominador por um real não nulo podemos alterar o valor da fração .

13. Na figura a seguir a área da região compreendida entre as circunferências vale $\frac{7}{4}$ da área da circunferência menor. Qual é a relação entre os raios das circunferências ?



14. Determine o domínio de definição da expressão abaixo e simplifique-a:

$$\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}\,.$$

15. Determine o domínio de definição da expressão $\dfrac{1}{x+\dfrac{3}{x-\dfrac{2}{x}}}$ e simplifique-a.

16. Determine o domínio de definição da expressão abaixo e simplifique-a:

$$\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}} - \frac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$$

17. Determine o domínio de definição das expressões a seguir, simplifique-as e determine os pontos onde elas se anulam.

(a) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+3$ (b) $\dfrac{2x-x^2-5}{1+x^4}$

(c) $\dfrac{x-1}{x-x^2}$ (d) $\dfrac{2}{x^2-4x+5}$

(e) $\dfrac{x^2-2x+2}{2+2x+x^2}$ (f) $\dfrac{x}{x^4-2x^2+3}$

(g) $\dfrac{x^4-1}{1+x^2}$ (h) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}-x}$

(i) $\dfrac{x}{1-\sqrt[3]{2x}}$ (j) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}-x}$

(k) $\dfrac{x}{1-\sqrt[3]{2x}}$ (l) $\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-1}-x}$

6

Expressão decimal

1 Número decimal

Número decimal é todo número real que pode ser escrito na forma

$$\pm\frac{p}{10^q} \quad \text{onde} \quad p\,,q \quad \text{são inteiros} \quad \text{e} \quad p\,,q \geq 0\,.$$

São exemplos de números decimais: $2 \quad ; \quad \frac{7}{10} \quad ; \quad -\frac{21}{10^3} \quad ; \quad \frac{4.237}{10^2} \quad ; \quad -\frac{213.729}{10^4}$.

Podemos colocá-los na forma de uma *expressão decimal finita*:

$$\frac{7}{10} = 0{,}7 \quad ; \quad -\frac{21}{10^3} = -0{,}021 \quad ; \quad \frac{4237}{10^2} = \underbrace{42{,}37}_{\substack{\text{expressão}\\ \text{decimal finita}}} \quad ; \quad -\frac{213729}{10^4} = \underbrace{-21{,}3729}_{\substack{\text{expressão}\\ \text{decimal finita}}}.$$

Repare que os números a seguir também são números decimais:

$$\frac{1}{2}\left(= \frac{5}{10} = 0{,}5\right) \quad ; \quad -\frac{21}{5}\left(= -\frac{42}{10} = -4{,}2\right) \quad ; \quad \frac{441}{25}\left(= \frac{1.764}{10^2} = 17{,}64\right).$$

De fato, não é difícil demonstrar que os números decimais são todos aqueles racionais que podem ser escritos na forma:

$$\pm\frac{p}{2^q \times 5^r} \quad \text{onde} \quad p\,,q\,,r \quad \text{são inteiros} \quad \text{e} \quad p\,,q\,,r \geq 0\,.$$

Os exemplos dados acima indicam como podemos demonstrar esse fato.

Uma maneira de reconhecer um número decimal, dado na forma de uma fração, é determinando a forma irredutível dessa fração. Estamos diante de um número decimal se, e somente se, o denominador dessa fração irredutível só possui fatores da forma 2^q ou 5^r onde $q\,,r \geq 0$.

Exemplos

❄ Segundo a definição, todo inteiro é um número decimal.

❄ Do observado acima, concluímos que $\dfrac{213}{10^5}$; $\dfrac{1.201}{2^4}$; $\dfrac{22.003}{5^3}$; $-\dfrac{11.253}{2^7 \times 5^8}$ são números decimais.

❄ As expressões decimais finitas associadas aos números do exemplo anterior são:

$$\frac{213}{10^5} = 0{,}00213 \quad ; \quad \frac{1.201}{2^4} = \frac{1.201 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{750.625}{10^4} = 75{,}0625$$

$$-\frac{11.253}{2^7 \times 5^8} = -\frac{11.253 \times 5}{10^7} = -0{,}0056265 \quad ; \quad \frac{22.003}{5^3} = \frac{22.003 \times 2^3}{5^2 \times 2^3} = \frac{176.024}{10^3} = 176{,}024\,.$$

❄ Outros números decimais:

$$\frac{2^3 \times 3^2 \times 7^3 \times 11^2}{2^5 \times 5^6} \quad ; \quad \frac{3^4 \times 11^3 \times 13^5}{3^2 \times 5^2} = \frac{3^2 \times 11^3 \times 13^5}{5^2}\,.$$

❄ No entanto $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{25}{7}$; $\dfrac{2^2 \times 3^2 \times 11^8}{5^3 \times 13^2}$ não são números decimais pois essas frações irredutíveis possuem no denominador potências com bases diferentes de 2 e de 5.

2 Expressão decimal

De fato, associamos à cada número racional, seja ele um número decimal ou não, uma expressão decimal. Fazemos isso usando o *Algoritmo de Euclides* como nos quadros a seguir:

```
21        | 16
16          1,3125
 50
 48
  20
  16
   40
   32
    80
    80
     0
```

```
5209      | 999
4995        5,2142 . . .
 2140 }
 1998 }
  1420
   999
   4210
   3996
    2140 }
    1998 }  Inicia-se a repetição
     1420   dos algarismos
```

e escrevemos,

$$\frac{21}{16} = \underbrace{1{,}3125}_{\text{expressão decimal finita}} = \frac{13.125}{10^4} \quad ; \quad \frac{5209}{999} = \underbrace{5{,}214214214\ldots}_{\text{expressão decimal infinita}}$$

No primeiro exemplo temos um número decimal que, como vimos, possui uma *expressão decimal finita*. No segundo, temos um número racional cuja *expressão decimal é infinita e periódica*; trata-se de uma *dízima periódica*. Em ambos os casos, a parte da expressão decimal após a vírgula é dita *parte decimal* e a anterior é denominada *parte inteira*.

De fato, não é muito difícil demonstrar, usando o Algorítmo de Euclides, que os números racionais:

☞ ou possuem uma expressão decimal finita e nesse caso estamos diante de um *número decimal* ;

☞ ou possuem uma expressão decimal infinita mas periódica e nesse caso estamos diante de uma *dízima periódica*.

Pergunta-se: *dado uma expressão decimal finita, ou infinita mas periódica, qual fração de inteiros ela representa ?*

Quando a expressão decimal é finita, a questão é simples:

$$1{,}07 = \frac{107}{10^2} \quad ; \quad -0{,}023 = -\frac{23}{10^3} \quad ; \quad 12{,}234 = \frac{12.234}{10^3} \,.$$

Consideremos agora, a expressão decimal $12{,}013434\ldots$ a qual é infinita mas periódica. Ela também é denotada por $12,01\overline{\mathbf{34}}$ onde $\overline{\mathbf{34}}$ significa $34343434\ldots$

Qual fração de inteiros essa expressão decimal representa ?

Seja $x = 12{,}013434\ldots$
Multiplicando ambos os membros da igualdade por 10^4 e 10^2, e subtraindo, obtemos:

$$\begin{array}{rl} 10^4x = & 120134{,}34343434343434\ldots \\ 10^2x = & 1201{,}34343434343434\ldots \\ \hline 10^4x - 10^2x = 118.933 & \end{array}$$

Conseqüentemente,

$$x = \frac{118.933}{10^4 - 10^2} = \frac{118.933}{10^2(10^2-1)} = \frac{118.933}{10^2 \times 99} = \frac{118.933}{9.900} \,.$$

Assim, a expressão decimal $12{,}0134343434\ldots$ representa a fração $\dfrac{118.933}{9.900}$.

Os argumentos que acabamos de usar para descobrir qual racional tem a expressão decimal $12{,}0134343434\ldots$ adapta-se a qualquer expressão decimal que seja *infinita e periódica*.

Guarde a *magia* da solução: a multiplicação de x por 10^4 e 10^2 teve como objetivo produzir duas expressões decimais distintas *com a mesma parte decimal*. Assim, a diferença dessas expressões decimais será um número inteiro.

Os irracionais também possuem expressões decimais as quais são *infinitas e não periódicas*. Em particular, sobre a representação decimal de π e de $\sqrt{2}$ temos:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 23\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973 79\ldots$$

A fração que representa uma dízima periódica é dita sua *geratriz*.

Exemplos

- O racional $1/3$ não é um número decimal pelos argumentos acima mencionados. Sua expressão decimal é a dízima periódica $0{,}333\ldots$
- O número real $1{,}01001000100001000001000000100000001000000001\ldots$ não é um número racional pois sua expressão decimal, apesar de infinita, não é periódica, por construção.
- Pela mesma razão o número real $1{,}121121112111121111121111112111111121111111112\ldots$ não é um número racional.

3 Notação científica

Para facilitar a escritura de números decimais muito grandes em valor absoluto ou muito próximos de zero, utiliza-se a *notação científica* que é da forma

$$\pm\, \boldsymbol{b} \times \mathbf{10}^{\boldsymbol{n}}$$

onde n é um número inteiro e b é um número decimal tal que $1 \leq b < 10$. O fator 10^n indica a *ordem de grandeza* do número.

Exemplos

- Em notação científica:
  - $125{,}23$ é escrito como $1{,}2523 \times 10^2$;
  - $0{,}00032$ é escrito como $3{,}2 \times 10^{-4}$;
  - -1012000 é escrito como $-1{,}012 \times 10^6$;
  - $-0{,}3 \times 10^{-11}$ é escrito como -3×10^{-12} ;

❄ A velocidade da luz que é de $300.000\,km/s$ é escrito como $3 \times 10^5\,km/s$;

❄ O *número de Avogadro*, muito usado na química vale $6{,}02 \times 10^{23}$ aproximadamente ;

❄ A massa do Sol é de $2 \times 10^{30}\,kg$ aproximadamente.

❄ A ordem de grandeza de

❄ 120×10^9 é 10^{11} pois, em notação científica, temos $120 \times 10^9 = 1{,}2 \times 10^{11}$;

❄ $5.501{,}34 \times 10^{20}$ é 10^{23} pois, em notação científica, temos $5.501{,}34 \times 10^{20} = 5{,}50134 \times 10^{23}$;

❄ $602{,}002 \times 10^{-30}$ é 10^{-28} pois, em notação científica, temos $602{,}002 \times 10^{-30} = 6{,}02002 \times 10^{-28}$.

Exercícios resolvidos

1. **Quais dos números racionais a seguir são números decimais ?**

(a) $\frac{5}{2}$ **(b)** $\frac{33}{12}$ **(c)** $\frac{2}{30}$ **(d)** $\frac{4}{5}$ **(e)** $\frac{22}{11}$ **(f)** $-\frac{213}{28}$ **(g)** $-\frac{226}{20}$ **(h)** $\frac{125}{35}$.

Solução Devemos verificar quais deles são da forma $\dfrac{p}{2^q \times 5^r}$ onde p, q, r são inteiros maiores ou iguais a zero. seguindo essa regra, podemos concluir que:

(a) $\dfrac{5}{2}$ é um número decimal ;

(b) $\dfrac{33}{12} = \dfrac{3 \times 11}{2^2 \times 3} = \dfrac{11}{2^2}$ é um número decimal ;

(c) $\dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{3 \times 5}$ não é um número decimal ;

(d) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{2^2}{5}$ é um número decimal ;

(e) $\dfrac{22}{11} = 2$ é um número decimal ;

(f) $\dfrac{213}{28} = \dfrac{3 \times 71}{2^2 \times 7}$ não é um número decimal ;

(g) $-\dfrac{226}{20} = -\dfrac{226}{2^2 \times 5}$ é um número decimal.

(h) $-\dfrac{125}{35} = -\dfrac{5^3}{5 \times 7}$ não é um número decimal.

2. **Coloque os números decimais a seguir na forma de uma fração irredutível:**

(a) 2,22 **(b) 52,5** **(c) 14,354** **(d) 0,025** **(e) 3,63 .**

Solução Em cada item a seguir, a fração à direita está na forma irredutível pois as bases das potências no denominador não dividem o numerador.

(a) $2{,}22 = \dfrac{222}{100} = \dfrac{111}{50} = \dfrac{111}{2 \times 5^2}$;

(b) $52{,}5 = \dfrac{525}{10} = \dfrac{525}{2 \times 5} = \dfrac{3 \times 5^2 \times 7}{2 \times 5} = \dfrac{3 \times 5 \times 7}{2} = \dfrac{101}{2}$;

(c) $14{,}354 = \dfrac{14.354}{1000} = \dfrac{14.354}{2^3 \times 5^3} = \dfrac{2 \times 7.177}{2^3 \times 5^3} = \dfrac{7.177}{2^2 \times 5^3}$ onde a última fração está na forma irredutível pois 7.177 não é divisível por 2, nem por 5.

(d) $0{,}0025 = \dfrac{25}{10^3} = \dfrac{5^2}{2^3 \times 5^3} = \dfrac{1}{2^3 \times 5}$;

(e) $3{,}63 = \dfrac{363}{100} = \dfrac{3 \times 11^2}{2^2 \times 5^2}$.

3. **Dê a expressão decimal dos seguintes números:**

(a) $\mathbf{32 \times 10^3}$ **(b)** $\mathbf{0,3 \times 10^{-2}}$ **(c)** $\mathbf{23 \times 10^{-4}}$ **(d)** $\mathbf{1/0,25}$ **(e)** $\mathbf{2/21}$ **(f)** $\mathbf{\dfrac{13}{7}}$.

Solução Em cada item a seguir o número à direita dá a expressão decimal procurada.

(a) $32 \times 10^3 = 3200$.

(b) $0{,}3 \times 10^{-2} = 0{,}003$.

(c) $23 \times 10^{-4} = 0{,}0023$.

(d) $\dfrac{1}{0{,}25} = \dfrac{1}{25/100} = \dfrac{100}{25} = 4$.

(e) $\dfrac{2}{21} = 0{,}\overline{\mathbf{095238}}$ obtido, dividindo-se 2 por 21.

(f) $\dfrac{13}{7} = 1{,}\overline{\mathbf{857142}}$ obtido, dividindo-se 13 por 7.

4. **Determine a forma fracionária irredutível das seguintes dízimas periódicas:**

(a) $\mathbf{17{,}\overline{12}}$ **(b)** $\mathbf{1{,}5\overline{631}}$ **(c)** $\mathbf{0{,}\overline{9}}$ **(d)** $\mathbf{-12{,}2\overline{53}}$.

Solução Vamos voltar à *magia* da solução exemplificada na página 115.

(a) Seja $x = 17{,}121212\ldots$. Multiplicando x por 10^2 e calculando a diferença $10^2x - x$ obtemos:

$$99\,x = (10^2 - 1)\,x = 10^2x - x = 1712{,}1212\ldots - 17{,}1212\ldots = 1695\,.$$

Portanto,

$$17{,}\overline{12} = \frac{1695}{99} = \frac{3 \times 5 \times 113}{3^2 \times 11} = \frac{5 \times 113}{3 \times 11}$$ que está na forma irredutível.

(b) Seja $z = 1{,}5631631\ldots$ Multiplicando z por 10^4 e por 10, e fazendo a diferença teremos:

$$9.990\,z = 10\,z \times 999 = 10\,z\,(10^3 - 1) = 10^4\,z - 10\,z = 15.631{,}631631\ldots - 15{,}631631\ldots = 15.616\,.$$

Logo,

$$1{,}5\overline{631} = \frac{15.616}{9.990} = \frac{2^8 \times 61}{2 \times 3^2 \times 111} = \frac{2^7 \times 61}{3^2 \times 111}$$ que está na forma irredutível.

(c) Seja $w = 0{,}999\ldots$ Multiplicando w por 10 e calculando a diferença $10\,w - w$ teremos:

$$9\,w = 10\,w - w = 9{,}99\ldots - 0{,}99\ldots = 9\,.$$

Consequentemente, $w = 1$.

(d) Seja $y = 12{,}25353\ldots$ Multiplicando y por 10^3 e por 10 , e calculando a diferença $10^3\,y - 10\,y$ teremos:

$$990\,y = 10\,y\,(100-1) = 10^3\,y - 10\,y = 12.253{,}5353\ldots - 122{,}5353\ldots = 12.131$$

Logo, $-12{,}2\overline{53} = -\dfrac{12.131}{990} = -\dfrac{12.131}{2\times 3^2\times 5\times 11}$ que está na forma irredutível pois 12.131 não é divisível por 2 , nem por 3 , nem por 5 e nem por 11 .

5. **Calcule:**

(a) $\mathbf{6{,}20\overline{2} - 4{,}\overline{2}}$ **(b)** $\sqrt{\mathbf{4{,}\overline{16}}}$ **(c)** $\mathbf{0{,}\overline{1}\times 1{,}\overline{2}}$ **.**

Solução Temos que:

(a) $6{,}20\overline{2} - 4{,}\overline{2} = 6{,}20 + 0{,}00222\ldots - 4{,}22 - 0{,}00222\ldots = 6{,}20 - 4{,}22 = 1{,}98$.

(b) Seja $x = 4{,}1616\ldots$ e considere a diferença $10^2x - x$:

$$99\,x = 10^2x - x = 416{,}1616\ldots - 4{,}1616\ldots = 412\,.$$

Assim,

$$4{,}1616\ldots = \frac{412}{99} = \frac{2^2\times 103}{3^2\times 11} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{4{,}\overline{16}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{103}{11}}\,.$$

(c) Seja $z = 0{,}111\ldots$ Assim, temos:

$$9\,z = 10\,z - z = 1{,}11\ldots - 0{,}11\ldots = 1 \quad\Longrightarrow\quad z = 1/9\,.$$

Resulta então que:

$$0{,}\overline{1}\times 1{,}\overline{2} = 0{,}111\ldots\times 1{,}222\ldots = \frac{1}{9}\times(1+0{,}222\ldots) = \frac{1}{9}\times(1+2\times 0{,}111\ldots)$$
$$= \frac{1}{9}\times\Big(1+2\times\frac{1}{9}\Big) = \frac{1}{9}\times\frac{11}{9} = \frac{11}{81}\,.$$

6. **Escreva os números a seguir usando a notação científica.**

(a) $\mathbf{100.000.000}$ **(b)** $\mathbf{2{,}0102\times 10^{-20}}$ **(c)** $\mathbf{-0{,}213\times 10^{7}}$ **(d)** $\mathbf{70\times 10^{-8}}$
(e) $\mathbf{0{,}1^{3}}$ **(f)** $\mathbf{0{,}001^{4}}$ **(g)** $\mathbf{0{,}000001^{-6}}$ **(h)** $\mathbf{0{,}000000001^{-10}}$.

Solução A notação científica é da forma $\pm\,a\times 10^n$ onde n é um inteiro e $1\le a<10$ é um número decimal. Assim, teremos:

(a) $100.000.000 = 1\times 10^8 = 10^8$.

(b) $2{,}0102\times 10^{-20}$ já está escrito em notação científica.

(c) $-0,213 \times 10^7 = -2{,}13 \times 10^6$.

(d) $70 \times 10^{-8} = 7 \times 10^{-7}$.

(e) $0{,}1^3 = \left(10^{-1}\right)^3 = 10^{-3}$.

(f) $0{,}001^4 = \left(10^{-3}\right)^4 = 10^{-12}$.

(g) $0{,}000001^{-6} = \left(10^{-6}\right)^{-6} = 10^{36}$.

(h) $0{,}000000001^{-10} = \left(10^{-9}\right)^{-10} = 10^{90}$.

7. **Dê a ordem de grandeza dos seguintes números:**
(a) $\mathbf{112 \times 10^{12}}$ **(b)** $\mathbf{2010{,}2 \times 10^{-20}}$ **(c)** $\mathbf{-10213 \times 10^{7}}$ **(d)** $\mathbf{70010{,}1 \times 10^{-8}}$

Solução Temos que:

(a) $112 \times 10^{12} = 1{,}12 \times 10^{14}$. Portanto, a ordem de grandeza é de 10^{14}.

(b) $2010{,}2 \times 10^{-20} = 2{,}0102 \times 10^{-17}$. Assim, a ordem de grandeza é de 10^{-17}.

(c) $-10213 \times 10^7 = -1{,}0213 \times 10^{11}$. Logo, a ordem de grandeza é de 10^{11}.

(d) $70010{,}1 \times 10^{-8} = 7{,}00101 \times 10^{-4}$. Consequentemente, a ordem de grandeza é de 10^{-4}.

8. **Efetue os cálculos seguintes e exprima o resultado em notação científica:**
(a) $\mathbf{0{,}0000021 \times 8.000}$ **(b)** $\mathbf{-\dfrac{0{,}0000002}{50.000}}$ **(c)** $\mathbf{(0{,}0000009)^2}$**.**

Solução Temos que:

(a) $0{,}0000021 \times 8.000 = 2{,}1 \times 10^{-6} \times 8 \times 10^3 = 16{,}8 \times 10^{-3} = 1{,}68 \times 10^{-2}$.

(b) $-\dfrac{0{,}0000002}{50.000} = -\dfrac{20 \times 10^{-8}}{5 \times 10^4} = -4 \times 10^{-12}$.

(c) $(0{,}0000009)^2 = \left(9 \times 10^{-7}\right)^2 = 9^2 \times \left(10^{-7}\right)^2 = 81 \times 10^{-14} = 8{,}1 \times 10^{-13}$.

9. **Use a notação científica e simplifique as expressões a seguir.**
(a) $\mathbf{\sqrt{0,0000002 \times 0,0002}}$ **(b)** $\mathbf{2 \times 10^{16} - 0{,}3 \times 10^{16}}$ **(c)** $\mathbf{\left(\dfrac{1.600 \times 20.000}{4.000}\right)^{1/3}}$**.**

Solução Temos que:

(a) $\sqrt{0,00000002 \times 0,0002} = \left(2 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{-4}\right)^{1/2} = \left(2^2 \times 10^{-12}\right)^{1/2} = 2 \times 10^{-6}$.

(b) $2 \times 10^{16} - 0{,}3 \times 10^{15} = 10^{15}(2 \times 10 - 0,3) = 19{,}7 \times 10^{15} = 1{,}97 \times 10^{16}$.

(c) $\left(\dfrac{1.600 \times 20.000}{4.000}\right)^{1/3} = \left(\dfrac{16 \times 10^2 \times 2 \times 10^4}{4 \times 10^3}\right)^{1/3} = \left(8 \times 10^{6-3}\right)^{1/3} = \left(8 \times 10^3\right)^{1/3} = 2 \times 10.$

10. Considere a dízima periódica $3,9999\ldots$
Pergunta-se: quantos dígitos 9 deve ter o número decimal $3,99\ldots9$ para que a diferença
$$3,9999\ldots - 3,99\ldots9 < 10^{-n} \text{ onde } n \in \mathbb{Z}^+ ?$$

Solução Seja $z := 3{,}999\ldots$ Segue daí que:

$$10z - z = 39{,}999\ldots - 3{,}999\ldots = 39 - 0{,}999\ldots - 3 - 0{,}999\ldots = 39 - 3 = 36\,.$$

Portanto, $9z = 36$ donde concluímos que $z = 4$. Assim, $3{,}999\ldots$ é representada pelo número inteiro 4.

Agora, podemos escrever:

$$3,999999\ldots - 3,\underbrace{9999\ldots9}_{m \text{ dígitos } 9} = 4 - 3,\underbrace{9999\ldots9}_{m \text{ dígitos } 9} = 0,\underbrace{0000\ldots000}_{m-1 \text{ dígitos } 0}1 = 10^{-m}.$$

Concluímos então que para termos $3,9999\ldots - 3,99\ldots9 < 10^{-n}$ basta considerar um número decimal do tipo $3,99\ldots9$ possuindo, pelo menos, $n+1$ dígitos 9.

Exercícios

1. Quais dos números a seguir são números decimais?

(a) $\frac{7}{23}$ (b) $\frac{1}{22}$ (c) $\frac{3}{15}$.
(d) $-\frac{4}{25}$ (e) $\frac{122}{125}$ (f) $\frac{321}{152}$.
(g) $\frac{24}{123}$ (h) $-\frac{45}{322}$ (i) $\frac{150}{126}$.

2. Coloque os números decimais a seguir na forma de uma fração irredutível.

(a) $2{,}211$ (b) $0{,}223$ (c) $-0{,}012$.
(d) $-3{,}2122$ (e) $11{,}121$ (f) $2{,}2213$.
(g) $0{,}001122$ (h) $-2{,}21214$ (i) $1{,}00151$.

3. Dê a expressão decimal dos seguintes números:

(a) 23×10^{-3} (b) $0{,}223 \times 10^{3}$.
(c) $-3{,}21 \times 10^{-2}$ (d) $11{,}121 \times 10^{3}$.
(e) $0{,}001122 \times 10^{5}$ (f) $-2{,}21214 \times 10^{6}$.

4. Calcule a forma fracionária das seguintes dízimas periódicas.

(a) $23{,}\overline{21}$ (b) $0{,}22\overline{012}$.
(c) $-3{,}21\overline{201}$ (d) $11{,}121\overline{52}$.
(e) $0{,}001122\overline{9}$ (f) $-2{,}21214\overline{007}$.

5. Coloque as expressões a seguir na forma de uma fração irredutível.

(a) $\frac{0{,}6}{3{,}75}$ (b) $\frac{0{,}025}{2{,}025}$ (c) $\frac{3{,}002}{0{,}0012}$.

6. Qual o menor inteiro k que satisfaz a condição $0{,}0010101 \times 10^{k} > 1$?

7. Faça os cálculos indicados a seguir e dê a resposta na forma de uma fração irredutível.

(a) $2{,}9898\ldots + 1{,}982982\ldots$
(b) $0{,}\overline{32} - 2{,}0\overline{211}$
(c) $21{,}\overline{21}/7{,}\overline{7}$
(d) $\sqrt{16{,}\overline{16}}$
(e) $(0{,}11313\ldots)^2$
(f) $2{,}\overline{201} - 22{,}01$
(g) $\sqrt{12{,}2\overline{18}}$
(h) $2{,}\overline{121} \times 1{,}\overline{32}$.

8. Complete os itens:
(a) ..... , ... $= 2{,}312 \times 10^{-5}$
(b) $0{,}00002376 = 237{,}6 \times 10^{\cdots\cdots}$
(c) $21235{,}89034 =$ .... , ... $\times 10^{-10}$
(d) $100021387945{,}70001 =$ .... , ... $\times 10^{15}$
(e) .... , ... $= 0{,}001010155 \times 10^{8}$.

9. Use o Maple ou o Mathematica para determinar a expansão decimal de $\frac{239}{145}$.
R: $1{,}6482758620689655172413793 10\,\overline{344...}$
onde $\overline{344...}$ representa a parte periódica e vale
$\overline{344...} = \overline{3448275862068965517241379310}$

10. Determine a geratriz das dízimas listadas a seguir.
(a) $0{,}32626\ldots$ (b) $201{,}0303\ldots$
(c) $2{,}3737\ldots$ (d) $-0{,}120303\ldots$

11. Reescreva os números a seguir, usando a notação científica.
(a) $0{,}32626$ (b) $11{,}23 \times 10^{-3}$
(c) $21001002{,}2 \times 10^{-10}$ (d) $0{,}0002111 \times 10^{6}$
(e) $0{,}0000014 \times 10^{8}$ (f) $2{,}3737$

12. Dê a ordem de grandeza dos seguintes números:
(a) $0{,}32626$ (b) $11{,}23 \times 10^{-3}$
(c) $21001002{,}2 \times 10^{-10}$ (d) $0{,}0002111 \times 10^{6}$
(e) $0{,}0000014 \times 10^{8}$ (f) $2{,}3737$

13. Faça os cálculos seguintes e exprima o resultado em notação científica.
(a) $0{,}22 \times 15000$
(b) $10{,}2 \times 0{,}00012$
(c) $21001002{,}2 \times 5000$
(d) $0{,}0002111 \times 60000$
(e) $0{,}0000014 \times 0{,}00000007$
(f) $2{,}3737 \times 0{,}00000005$

14. Use a notação científica para expressar cada um dos números:
(a) $10014{,}0012002$
(b) $0{,}00010101 \times 0{,}000002$
(c) $4{,}000005 \times 0{,}0000003$
(d) $0{,}0000012 \times 0{,}00000101$
(e) $1010{,}000002 \times 0{,}00000007$
(f) $2{,}25 \times 0{,}000000055$

15. Expresse $6.400.000.000/0{,}0004$ em notação científica.

16. Escreva as frações a seguir como dízimas periódicas.

(a) $2/7$ (b) $-35/49$
(c) $101/165$ (d) $23/11$
(e) $-100/99$ (f) $123/1234$

17. Determine $0{,}25\overline{26}$ como quocinte de dois inteiros.

7

Números racionais

Números racionais são frações de números inteiros, isto é, são os números reais da forma

$$\frac{m}{n} \quad \text{onde} \quad m\,,\, n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad n \neq 0\,.$$

Eles também são ditos *números fracionários*.

Na lição 5 vimos: igualdade, simplificação e operações com frações. Consequentemente, sabemos reconhecer quando dois números fracionários são iguais, sabemos simplificá-los e operar com eles.

1 Frações irredutíveis

Uma fração de inteiros é dita *irredutível* quando o numerador e o denominador não têm fatores primos em comum, isto é, são primos entre si. Por exemplo:

$$\frac{2}{7} \;;\; \frac{23}{15} \;;\; \frac{21}{100} \quad \text{são frações irredutíveis, mas} \quad \frac{2}{6} \;;\; \frac{10}{15} \;;\; \frac{9}{3} \quad \text{não o são.}$$

Toda fração não nula de inteiros tem sua forma irredutível. Já falamos sobre isso na página 36. Para encontrá-la, basta cancelar os fatores primos comuns ao numerador e ao denominador. Para isso, usamos a regra de simplificação de frações vista na Lição 5 e o *Teorema de Decomposição em Fatores Primos* que nos garante o seguinte resultado:

Teorema (da Decomposição em Fatores Primos): *Todo número inteiro* $n > 1$ *pode ser escrito na forma* $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_s^{\alpha_s}$ *onde* $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_s$ *são números primos e* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *são inteiros positivos.*

Além disso, essa decomposição é única, isto é:
se $n = q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \cdots \times q_r^{\beta_r}$ *onde* $q_1 < q_2 < \cdots < q_r$ *são números primos e* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ *são inteiros positivos então* $r = s$, $q_i = p_i$ *e* $\beta_i = \alpha_i$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Exemplos

❄ $\dfrac{2}{12} = \dfrac{2}{2^2 \times 3} = \dfrac{1}{6}$ e $\dfrac{1}{6}$ está na forma irredutível .

❄ $\dfrac{15}{21} = \dfrac{3 \times 5}{3 \times 7} = \dfrac{5}{7}$ e $\dfrac{5}{7}$ está na forma irredutível .

❄ $\dfrac{12}{19} = \dfrac{2^2 \times 3}{19}$ já está na forma irredutível pois 12 e 19 não têm fatores primos em comum.

❄ $-\dfrac{2 \times 3^2 \times 7^3}{3 \times 7^4 \times 11} = -\dfrac{2 \times 3}{7 \times 11}$ e $-\dfrac{2 \times 3}{7 \times 11}$ está na forma irredutível .

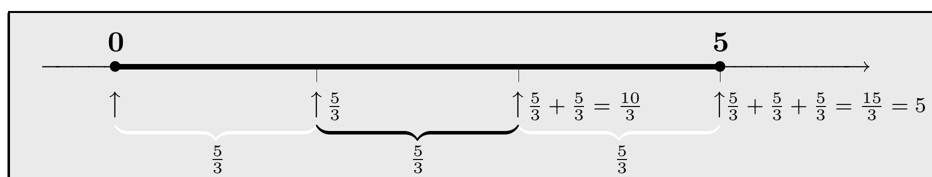
2 Representando os racionais na reta

Como representar um número racional na reta?

Mais precisamente,

Como representar $\dfrac{5}{3}$ *na reta?*

Nossa intuição, provavelmente, diria: divida o segmento de reta de 0 a 5 em 3 partes iguais. A primeira marcação dessa divisão indica a localização na reta da fração $\frac{5}{3}$ (ou 5 dividido por 3). As outras representam, respectivamente, as localizações de $\frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ e $\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5$.



Dito isso, a questão crucial se resume a:

Como dividir um segmento de reta em partes iguais ?

Mais precisamente,

Como dividir o segmento de 0 *a* 5 *em* 3 *partes iguais* ?

A resposta a esta pergunta vem da geometria. Ela é conseqüência do seguinte teorema, conhecido como *Teorema de Thales*[1].

2.1 O Teorema de Thales

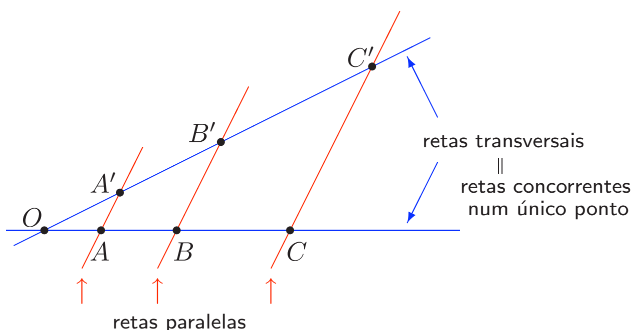
Teorema (de Thales): *Retas paralelas cortando transversais determinam segmentos proporcionais.*

É preciso entender, claramente, o que diz o enunciado. Para isso, a representação gráfica mostrada na figura a seguir, é muito útil.

Teorema de Thales:

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

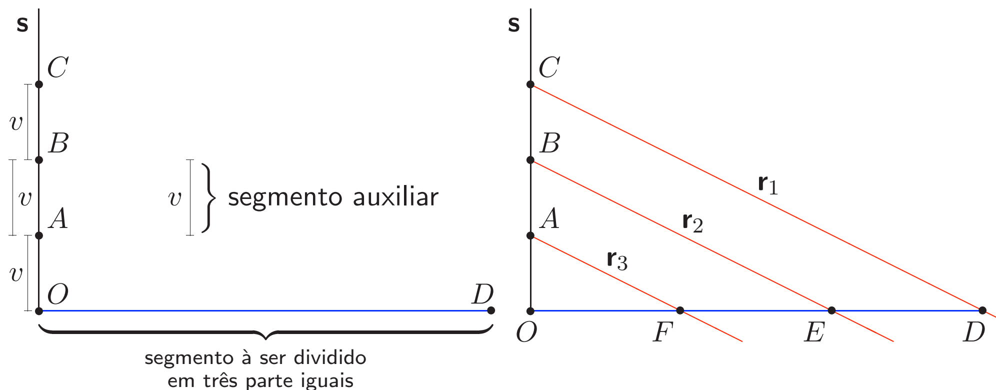
onde $|XY|$ denota a medida do segmento de reta de X à Y.



2.2 Aplicando o Teorema de Thales

Seja OD o segmento que pretendemos dividir em três partes iguais e consideremos um outro segmento auxiliar v, mostrados na figura a seguir. Fixemos uma reta **s** passando por O, por exemplo, aquela perpendicular ao semento OD. A partir de O e sobre a reta **s** , façamos 3 marcações com um segmento auxiliar v e denotemos por A , B e C os pontos correspondentes, como mostrado na próxima figura.

[1]Thales de Miletus viveu no século VI a.C. e é considerado um dos "sete sábios" da antiguidade. Conta a tradição que a geometria demonstrativa começou com Thales de Miletus.



Seja $\mathbf{r}_1$ a reta passando pelos pontos C e D. Além disso, sejam:

- E a interseção com o segmento OD da reta $\mathbf{r}_2$ que passa por B e é *paralela* a reta $\mathbf{r}_1$;
- F a interseção com o segmento OD da reta $\mathbf{r}_3$ que passa por C e é *paralela* a reta $\mathbf{r}_1$.

O Teorema de Tales nos garante que:

$$\frac{|OA|}{|OF|} = \frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|ED|}\,.$$

Como $|OA| = |AB| = |BC|$ nós concluímos que $|OF| = |FE| = |ED|$ e consequentemente, concluímos: traçadas as paralelas $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ teremos dividido o segmento OD em 3 partes iguais.

2.3 Traçando as paralelas

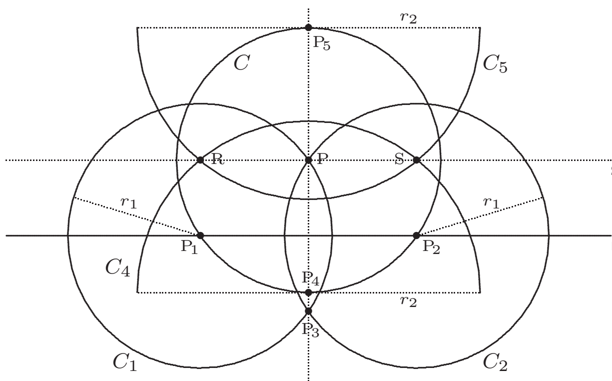
Resta então resolver a questão final:

Dados no plano, uma reta $\mathbf{r}$ *e um ponto* $\mathbf{P}$ *fora dela, como traçar usando régua e compasso, a reta que passa por* $\mathbf{P}$ *e é paralela a* $\mathbf{r}$?

Podemos fazê-lo da seguinte forma:

- Traçamos um círculo C com centro em P e que intersecta a reta r em dois pontos distintos P_1 e P_2. Seja r_1 o raio de C.

- Com centros em P_1 e P_2 traçamos círculos C_1 e C_2 respectivamente, ambos de raio r_1. Tais círculos se intersectam nos pontos P e P_3 que determinam a reta perpendicular a r passando por P. Essa reta, intersecta o círculo C nos pontos P_4 e P_5.



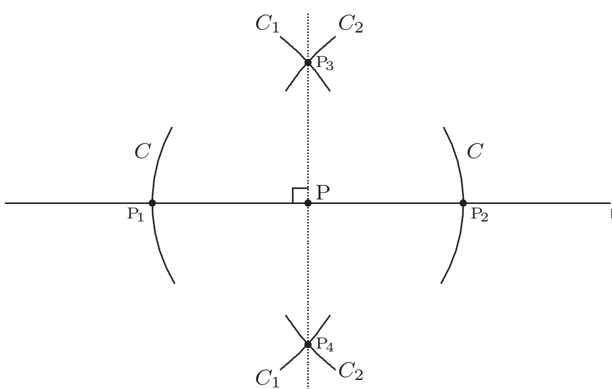
- Com centros em P_4 e P_5 traçamos círculos C_4 e C_5 respectivamente, ambos de raio $r_2 > r_1$. Tais círculos se intersectam nos pontos R e S que determinam a reta paralela a reta r, passando por P.

Exercícios resolvidos

1. **Dados uma reta r e um ponto P sobre ele, descreva um processo geométrico que permita traçar, no plano, a reta que passa por P e é perpendicular a r.**

Solução Fixemos uma reta $\mathbf{r}$ e um ponto $\mathbf{P}$ sobre ela. O processo de construção é parte do processo geométrico descrito na página 128.

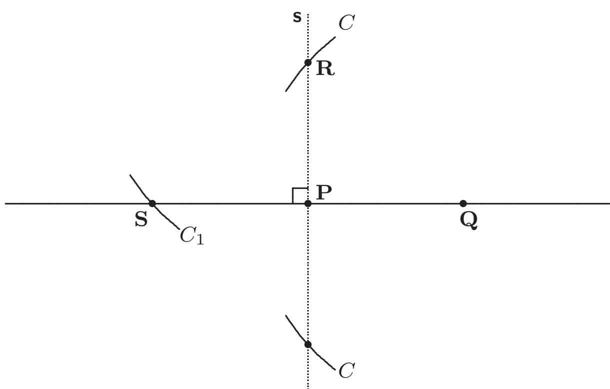
- Traçamos um círculo C com centro em $\mathbf{P}$ e que intersecta a reta $\mathbf{r}$ em dois pontos distintos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$. Seja r_1 o raio de C.
- Com centros em $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$, traçamos círculos C_1 e C_2 respectivamente, ambos de raio $r_2 > r_1$. Tais círculos se intersectam nos pontos $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$ que determinam a reta perpendicular a $\mathbf{r}$ passando por $\mathbf{P}$.



2. **Como marcar, na reta, o simétrico de um ponto em relação a outro, dispondo para isso, apenas de régua e compasso ? Descreva um processo geométrico como feito na construção acima.**

Solução Sejam dados uma reta $\mathbf{r}$ e dois pontos distintos $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ sobre ela. A construção do simétrico pode ser feita da seguinte forma:

- Repetindo o exercício anterior, traçamos a reta s perpendicular a $\mathbf{r}$, por $\mathbf{P}$.
- Com centro em $\mathbf{Q}$ tracemos um círculo C de raio r que intersecta a reta s em dois pontos distintos. Seja $\mathbf{R}$ um desses pontos.
- Com centro em $\mathbf{R}$ tracemos um círculo, novamente de raio r. Tal círculo intersecta a reta $\mathbf{r}$ em dois pontos: o ponto $\mathbf{Q}$ e o seu $\mathbf{S}$ simétrico em relação ao ponto $\mathbf{P}$.



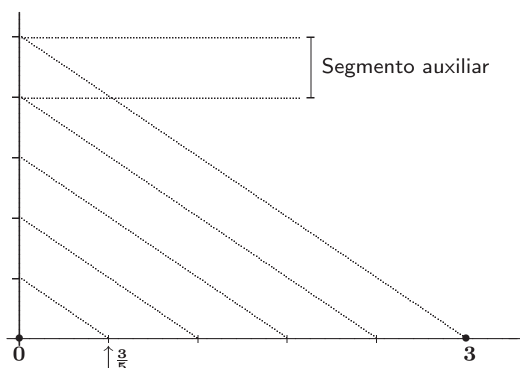
3. **Dados dois pontos distintos $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ da reta, como mostrados na figura abaixo, marque o ponto $\mathbf{R}$ a esquerda de $\mathbf{P}$, que tem a seguinte propriedade: $|\mathbf{PR}| = 2|\mathbf{PQ}|$.**



Solução Simples. Marcamos o simétrico $\mathbf{R}$ de $\mathbf{Q}$ em relação a $\mathbf{P}$. Depois marcamos o simétrico $\mathbf{S}$ de $\mathbf{P}$ em relação a $\mathbf{R}$.

4. **Marcados os números 0 e 3 na reta orientada, marque o número $3/5$.**

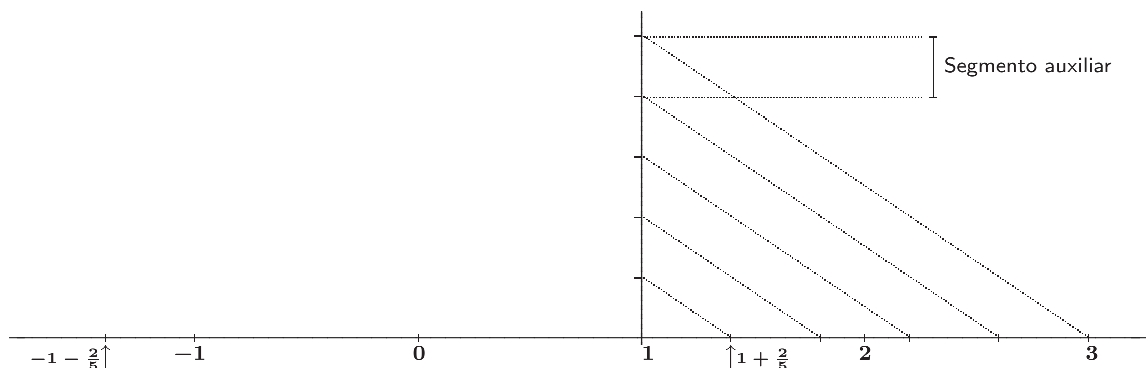
Solução Para isso, dividiremos o segmento[2] de 0 a 3 em cinco partes iguais. A primeira marcação dessa divisão representará o ponto $3/5$. Aplicaremos o Teorema de Thales para realizar essa divisão, como na divisão do segmento de 0 a 5 em três parte iguais. O semento auxiliar mostrado na figura é usado para fazer as marcações na reta vertical. Essa reta e o eixo orizontal são as duas transversais do Teorema de Thales. As retas pontilhadas são as paralelas.



5. **Fixe uma unidade e marque na reta orientada os números $\frac{21}{15}$ e $-\frac{21}{15}$.**

Solução Fixemos uma unidade com a abertura do compasso, e marquemos com esse compasso os inteiros $0, 1, 2, 3$ e -1 a partir da escolha de uma origem. Temos que $\dfrac{21}{15} = \dfrac{3\times 7}{3\times 5} = \dfrac{7}{5} = \dfrac{5+2}{5} = 1 + \dfrac{2}{5}$. Assim, para marcar o ponto correspondente ao número $21/15$ basta, por exemplo, dividir o

segmento de 1 a 3 em 5 partes iguais e tomar a primeira marcação. Ela representará o número $1+\frac{2}{5}$. Marcados a origem e o número $1+\frac{2}{5}$, usamos a construção geométrica para marcar o simétrico de um número e assim, marcaremos o número $-1-\frac{2}{5}$ terminando a construção proposta no exercício.

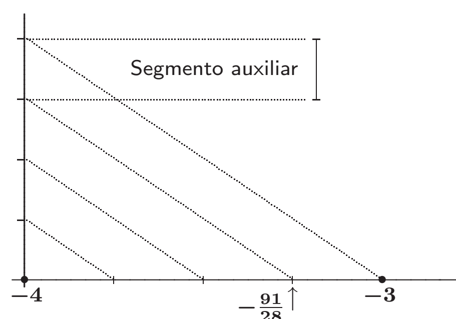


6. **Marque na reta orientada o número $-91/28$.**

Solução Temos que

$$-\frac{91}{28}=-\frac{7\times 13}{2^2\times 7}=-\frac{13}{4}=-\frac{12+1}{4}=-3-\frac{1}{4}.$$

Assim, para marcar $-91/28$ na reta, podemos por exemplo, dividir o segmento de -4 a -3 em quatro partes iguais e tomar a terceira marcação, contando de -4 para -3.



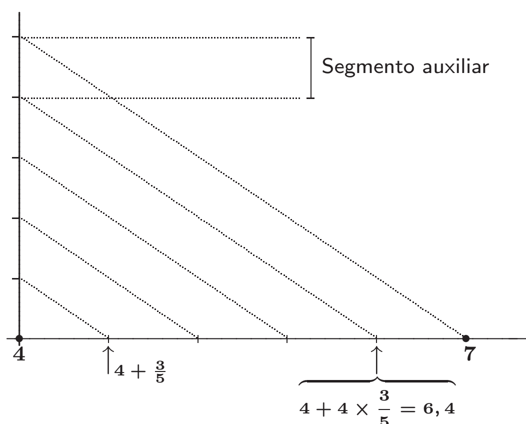
7. **Conhecendo as posições na reta orientada dos números 4 e 7, marque os números $23/5$ e $6{,}4$.**

Solução Temos que

$$\frac{23}{5}=\frac{20+3}{5}=4+\frac{3}{5} \quad \text{e}$$

$$6{,}4=\frac{64}{10}=\frac{32}{5}=\frac{20+12}{5}=4+\frac{12}{5}=4+4\times\frac{3}{5}.$$

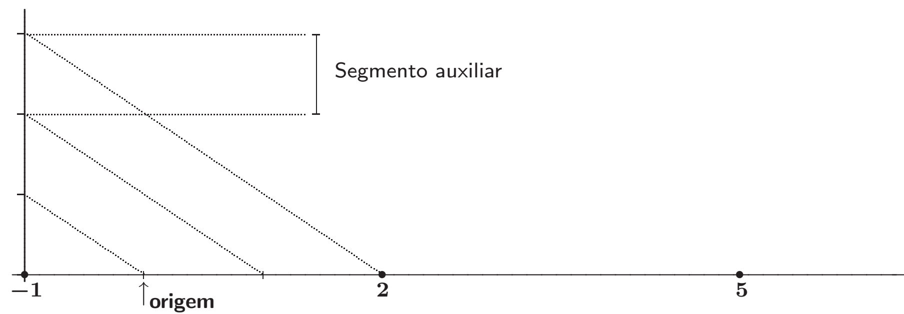
Assim, para marcar os pontos em questão vamos dividir o intervalo de 4 a 7 em 5 partes iguais. Cada um dos subintervalos terá comprimento $\frac{7-4}{5}=\frac{3}{5}$. Portanto, a primeira marca dessa divisão representará o número $4+\frac{3}{5}=\frac{23}{5}$ e aúltima marca representará o número $4+4\times\frac{3}{5}=6{,}4$.



8. **Conhecendo na reta orientada as posições dos números 2 e 5, marque a origem.**

Solução Podemos fazer isso da seguinte forma:

- Com as construções já desenvolvidas, marcamos o simétrico de 5 em relação ao ponto 2. Dessa maneira, determinamos a posição do número -1.
- Dividimos o segmento de -1 a 2 em quatro partes iguais. A primeira marcação contada de -1 para 2, representa a origem da reta.



Exercícios

1. Quais dos números a seguir são racionais ?

(1) 23 (2) 21,55 (3) 0,11
(4) $\sqrt{0,81}$ (5) $0,402-14$ (6) $\frac{5,0}{7}$
(7) $\frac{5}{4,2}$ (8) $\frac{0,34}{1,27}$ (9) $\frac{0,003}{1,002}$.
(10) $0,21$ (11) $\frac{0,1}{2,1}$ (12) $\sqrt{0,49}$.

Se racionais, escreva-os na forma de uma fração irredutível.

2. Justifique as afirmações a seguir:

(a) A soma de números racionais é um número racional ;
(b) A diferença de números racionais é um número racional ;
(c) O produto de números racionais é um número racional ;
(d) O quociente de números racionais não nulos é um número racional não nulo .

3. Prove que se a é um racional positivo, então

$$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

também é racional.

4. Quantos racionais não nulos existem entre 0 e 5, possuindo a forma $\frac{7}{n}$ onde n é um inteiro ?

5. Quantos racionais existem de -7 a 20 possuindo a forma $\frac{n}{4}$ onde n é um inteiro ?

6. Todo número racional não nulo pode ser colocado na forma $\frac{7}{n}$ com $n \in \mathbb{Z}$?

7. Todo número racional não nulo pode ser colocado na forma $\frac{9}{b}$ com $b \in \mathbb{Q}$?

8. Quantos números inteiros n existem tais que $\frac{2}{n} < 0,5 < \frac{3}{n}$?

9. Quantos números racionais b existem satisfazendo a condição $\frac{2}{b} < 0,5 < \frac{3}{b}$?

10. Quantos números inteiros n satisfazem a desigualdade $0,5 < \frac{3}{|n|}$?

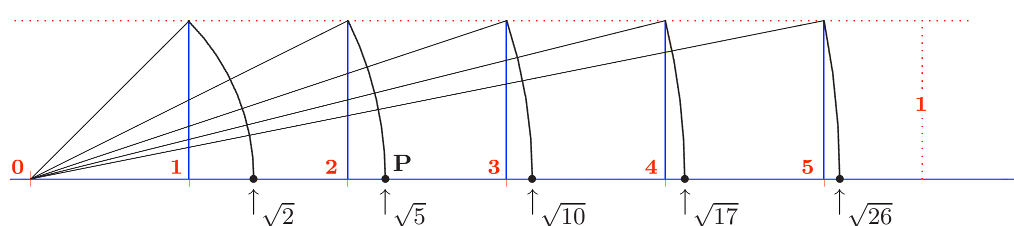
11. Considere a fração $\frac{14}{6}$. Quais os dois menores números inteiros positivos que podemos adicionar ao numerador e ao denominador sem alterar o valor da fração ?

8

Números irracionais

Um dos primeiros números *não racionais* que conhecemos foi o $\sqrt{2}$. Ele pode ser realizado como a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários; assim nos ensinou Pitágoras. Essa realização geométrica de $\sqrt{2}$ nos permite localizá-lo na reta orientada.

Na figura a seguir, representamos na reta alguns *números irracionais*. Eles são os comprimentos das hipotenusas dos triângulos retângulos com um cateto unitário e o outro cateto medindo, respectivamente, 1, 2, 3, 4 e 5.



Os arcos na figura acima são arcos de círculos centrados em 0.

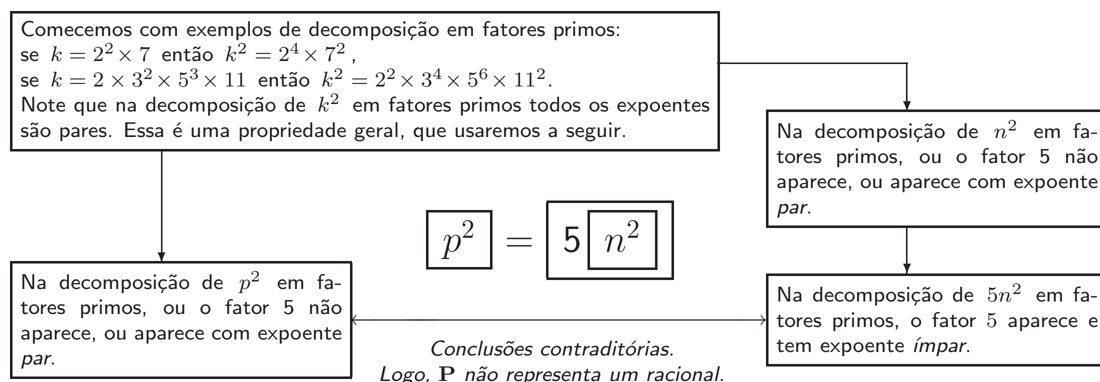
Mas porque esses números não são racionais ?

1 $\sqrt{5}$ não é racional

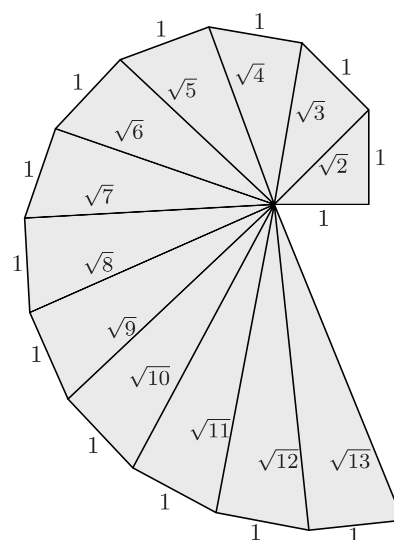
A resposta à essa pergunta é dada no diagrama a seguir, o qual explica porque $\sqrt{5}$ não pode ser racional. Nos argumentos, usamos dois belos teoremas: o *Teorema de Pitágoras* e o *Teorema de Decomposição em Fatores Primos*.

Na figura anterior o ponto $\mathbf{P}$ *não representa um número racional*. E por que não ? Vejamos: se $\mathbf{P}$ representasse o racional positivo p/n então, pelo Teorema de Pitágoras, teríamos:

$(p/n)^2 = 2^2 + 1^2$, ou seja, $p^2/n^2 = 5$. Consequentemente, $p^2 = 5n^2$. No entanto, essa igualdade expressa um absurdo. Para ver isso, siga as setas do próximo diagrama.

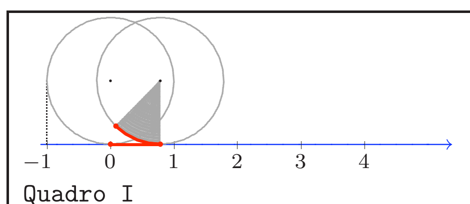


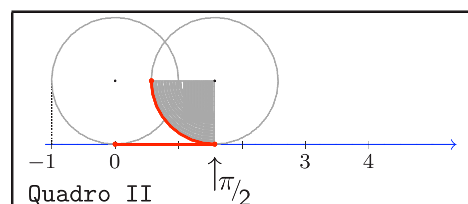
Na figura ao lado os triângulos são retângulos, cada um deles têm um cateto unitário e as hipotenusas valem $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \dots , \sqrt{13}$ respectivamente.

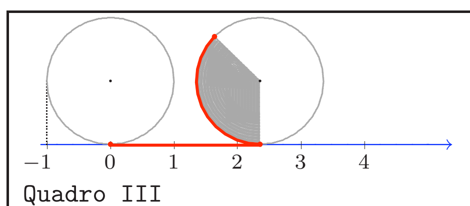


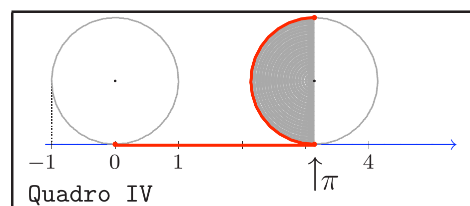
Outro *número irracional* importante é o semi-perímetro de uma circunferência de raio 1: o número π. Aliás, a não racionalidade de π só foi demonstrada em 1761, pelo matemático francês J.H. Lambert.

Na figura a seguir mostramos uma circunferência de raio 1. Como bem sabemos, a metade do seu perímetro vale π. Imagine que essa circunferência começa a girar (sem deslizar) sobre a reta. Após dar um meio giro ela terá se deslocado de um comprimento exatamente igual ao seu semi-perímetro, isto é, igual a π.









Nas figuras acima, o comprimento de cada arco mais escuro é igual ao comprimento do segmento de reta que vai de *zero* até a extremidade inferior desse arco.

As regras a seguir nos permitem construir vários outros irracionais.

☞ **racional + irracional = irracional** e **racional - irracional = irracional** ;
Exemplos: $1+\sqrt{5}$; $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}$; $6-\pi$ são números irracionais .

☞ **racional não nulo × irracional = irracional** ;
Exemplos: $3\sqrt{5}$; $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$; -5π são números irracionais .

☞ **O inverso de um irracional é um irracional** ;
Exemplos: $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\pi}$ são números irracionais .

☞ **A raiz n-ésima de um irracional positivo é um irracional positivo** ;
Exemplos: $\sqrt{\pi}$; $\sqrt[3]{\pi}$; $\sqrt[4]{\sqrt{2}}$; $\sqrt[7]{\pi}$; $\sqrt[8]{\sqrt{10}}$ são números irracionais .

☞ $\sqrt{1+n^2}$ **é irracional quando** $n\in\mathbb{Z}^*$;
Exemplos: $\sqrt{1+4^2}=\sqrt{17}$; $\sqrt{1+10^2}=\sqrt{101}$; $\sqrt{1+9^2}=\sqrt{82}$ são números irracionais .

Salvo a última regra, todas as outras são de demonstração elementar. Os próximos dois exemplos dão uma clara indicação de como fazê-lo.

Exemplo

❄ Admitindo que π é irracional, mostre que 2π também é irracional.

Solução Bem, poderíamos usar a regra que citamos antes e responder: 2π é irracional pois é o produto de um racional não nulo (no caso, o número 2) por um irracional (no caso, o número π).

No entanto, vamos dar uma explicação que, de fato, serve como demonstração dessa regra. Faremos uma *demonstração por redução ao absurdo*.

☞ Suponhamos que 2π é racional.
☞ Segue daí que: $2\pi = \frac{m}{n}$ onde m , n são inteiros positivos ;
☞ Logo: $\pi = \frac{m}{2n}$
☞ Consequentemente: π é um número racional.
☞ O que é absurdo, por hipótese.
☞ Portanto: 2π é de fato um número irracional.

❄ Com o mesmo tipo de argumento podemos mostrar que o produto de um racional não nulo por um irracional é um irracional. Vejamos:

Seja b um irracional e seja p/q um racional qualquer onde $p\,, q$ são inteiros não nulos.

☞ Suponhamos que $\frac{p}{q} \times b$ é racional.

☞ Segue daí que: $\frac{p}{q} \times b = \frac{m}{n}$ onde $m\,,\, n$ são inteiros não nulos ;

☞ Logo: $b = \frac{q \times m}{p \times n}$

☞ Consequentemente: b é um número racional.

☞ O que é absurdo, por hipótese.

☞ Portanto: $\frac{p}{q} \times b$ é de fato um número irracional.

❄ Note que a soma de dois irracionais, mesmo sendo ambos positivos, pode não ser um irracional. É o caso por exemplo dos números $\sqrt{5}$ e $5 - \sqrt{5}$. Ambos são irracionais positivos mas, $\sqrt{5} + (5 - \sqrt{5}\,) = 5$ que não é irracional.

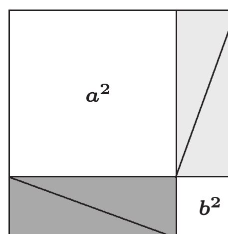
2 O Teorema de Pitágoras

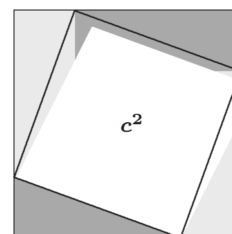
Provavelmente, nenhum teorema passa por tantas mentes quanto o *Teorema de Pitágoras*.

Teorema (de Pitágoras): *Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Vamos apresentar uma *Demonstração sem Palavras* para essa maravilha da criatividade humana.

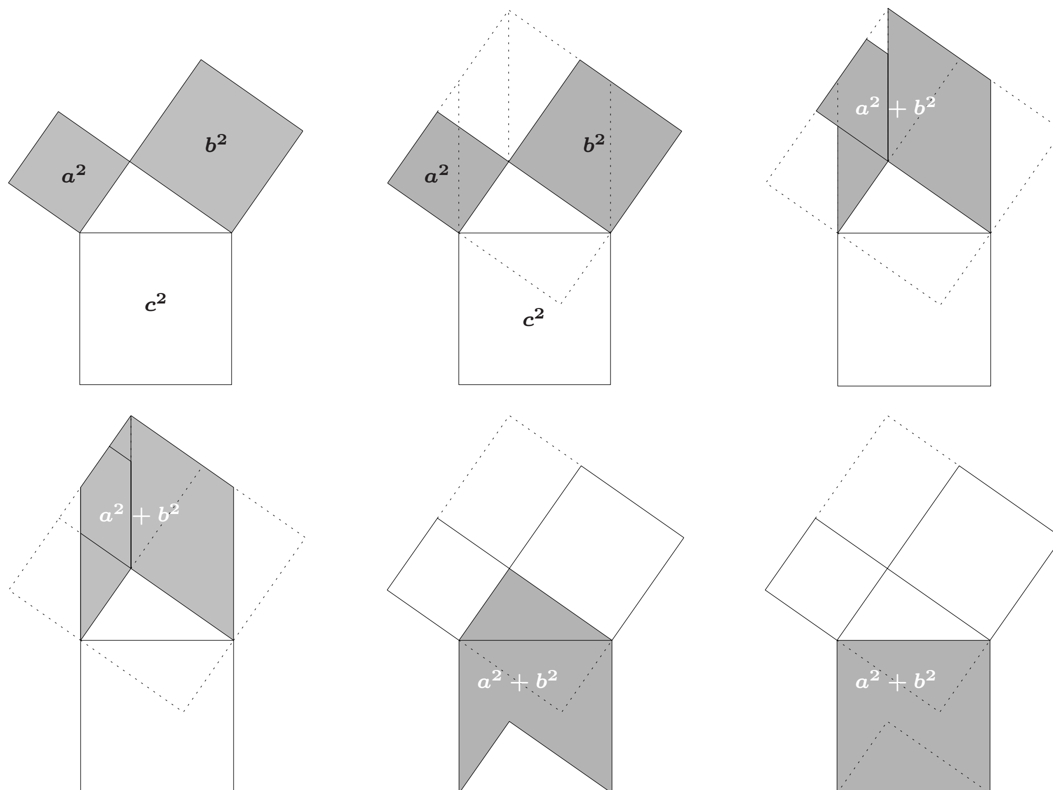
De fato, essas figuras não constituem uma demonstração. Elas nos ajudam a *ver*, a *sentir* que o Teorema de Pitágoras *deve ser verdadeiro*. Elas vão mais além; elas nos *mostram*, nos *indicam* o que devemos fazer para realmente produzir uma demonstração para esse teorema.





Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha de Samos, no mar Egeu. Foi uma das figuras mais influentes e misteriosas da matemática do século VI a.C. Provavelmente, conheceu Thales de Miletus que também viveu nessa mesma época, embora Pitágoras fosse bem mais jovem do que Thales.

As seis figuras a seguir exibem uma outra *demonstração sem palavras* do Teorema de Pitágoras, desta feita atribuída à Euclides.



Exercícios resolvidos

1. **Quais dos números reais a seguir são irracionais ? Responda essa questão usando as regras ou argumentos vistos nessa lição.**

(a) $\sqrt{50}$ **(b)** $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ **(c)** $\dfrac{(2+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$ **(d)** $\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

Solução

(a) Temos que: $\sqrt{50}=\sqrt{1+n^2}$ onde $n=7\in\mathbb{Z}^*$. Logo, $\sqrt{50}$ é irracional[1].

[1] Repetindo os mesmos argumentos usados na demonstração que $\sqrt{5}$ é irracional, você poderia provar que $\sqrt{50}$ também é irracional.

(b) Vimos que $\sqrt{2}$ é irracional. Logo, $-\sqrt{2}$ também o é. Assim, $1-\sqrt{2}$ é irracional e, consequentemente, sua raíz cúbica $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ é um número irracional.

Outra forma de responder à questão é a seguinte:

Suponha que $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ é racional. Logo, existem $p\,,q \in \mathbb{Z}^*$ tais que $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} = p/q$. Elevando ao cubo, obtemos:

$$1-\sqrt{2} = \frac{p^3}{q^3} \iff \sqrt{2} = 1 - \frac{p^3}{q^3}$$

provando assim que $\sqrt{2}$ é racional, o que é absurdo. Portanto, $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ é iracional.

(c) Simplificando a expressão obtemos:

$$\frac{(2+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{6}}{2(\sqrt{6}+2)} = \frac{1}{2}$$ mostrando que o número em questão é racional e, portanto, não é irracional.

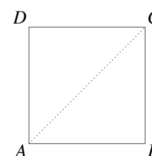
(d) As regras dadas não permitem decidir se esse número é ou não irracional. Para mostrar que ele é irracional vamos usar os argumentos do exemplo da página 138.

- ☞ Suponhamos que $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ é racional.
- ☞ Segue daí que: $\sqrt{6}-\sqrt{3} = m/n$ onde $m\,,\,n$ são inteiros positivos;
- ☞ Elevando ao quadrado: $3-2\sqrt{18} = m^2/n^2$
- ☞ Logo: $\sqrt{18} = \dfrac{3n^2-m^2}{2n^2}$
- ☞ Portanto: $3\sqrt{2} = \dfrac{3n^2-m^2}{2n^2}$
- ☞ Consequentemente: $\sqrt{2} = \dfrac{3n^2-m^2}{6n^2}$ é um número racional.
- ☞ O que é absurdo, pois $\sqrt{2}$ não é um número racional.
- ☞ Portanto: $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ é de fato um número irracional.

2. **Use o Teorema de Pitágoras para responder a seguinte pergunta: quanto mede o lado de um quadrado cuja diagonal mede 30 cm ?**

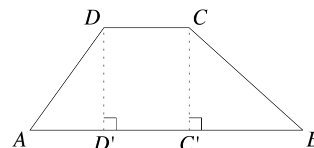
Solução Considere o quadrado $ABCD$ cuja diagonal mede $30\,cm$. O triângulo ABC é retângulo em B e isósceles pois, $|AB| = |BC|$. Assim, temos:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \implies 2|AB|^2 = 900 \implies |AB|^2 = 900/2$$
$$\implies |AB| = 30/\sqrt{2} \implies |AB| = 15\sqrt{2}\,.$$



Logo, o lado do quadrado mede $15\sqrt{2}\;cm$.

3. **No trapézio mostrado abaixo, são dados: $|AB| = 8$, $|AD| = 5$, $|DC| = 3$ e $|CB| = 4$. Calcule a altura do trapézio.**



Solução Os triângulos $AD'D$ e $C'BC$ são retângulos. Assim, fazendo $h = |D'D| = |C'C|$, $x = |AD'|$ e $z = |C'B|$, segue do Teorema de Pitágoras que:

$$25 = x^2 + h^2 \quad \text{e} \quad 16 = z^2 + h^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - z^2 = 9\,. \qquad (8.1)$$

Além disso, temos que:

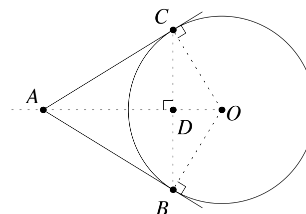
$$x + 3 + z = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x + z = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 5 - x\,. \qquad (8.2)$$

De (8.1) e (8.2) segue que: $x^2 - (5-x)^2 = 9 \iff 10x = 34 \iff x = 3{,}4$. Assim,

$$h^2 = \frac{2500}{100} - \frac{34^2}{100} = \frac{1344}{100} = \frac{2^6 \times 3 \times 7}{2^2 \times 5^2} = \frac{2^4 \times 21}{5^2} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{4\sqrt{21}}{5}\,.$$

Terminamos o exercício com uma pergunta que temos a obrigação moral de fazer: *um tal trapézio existe*? Tente uma solução geométrica, sem cálculos.

4. **A figura abaixo mostra um círculo de raio r centrado na origem O. Do ponto A traçamos duas tangentes ao círculo passando respectivamente pelos pontos B e C do círculo. Calcule a distância do ponto A a origem quando o ângulo central $\widehat{BOC}$ medir 90°.**



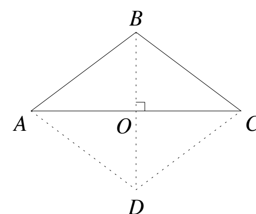
Solução Como $\widehat{BOC}$ é um ângulo reto e $|OB| = |OC|$ concluímos que o triângulo BOC, além de retângulo em O, é isósceles. Assim, o ângulo $\widehat{DCO}$ mede 45°. Além disso, o ângulo $\widehat{DOC}$ também mede 45° pois o segmento OA é bissetriz de $\widehat{BOC}$. Segue daí que o triângulo CDO é retângulo em D e isósceles. Consequentemente, $|DC| = |DO|$.
Por outro lado, o polígono $ABOC$ é um retângulo cujas medidas das semi-diagonais CD e DO são iguais. Logo, $ABOC$ é um quadrado e temos que

$$|OA| = 2|OD|\,.$$

Para finalizar precisamos calcular o comprimento do segmento OD. Para isso temos que:

$$r^2 = |OD|^2 + |CD|^2 = 2|OD|^2 \quad \Longrightarrow \quad |OD| = r/\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad |OA| = r\sqrt{2}\,.$$

5. **Mostre que todo triângulo isósceles cuja altura vale a metade da base é um triângulo retângulo.**



Solução Consideremos um tal triângulo ABC como mostrado na figura, onde $|BA| = |BC|$. Com duas cópias de tal triângulo construímos o losângulo $ABCD$. Suas diagonais AC e BD se intersectam ortogonalmente em seu ponto médio O. Como por hipótese $|BO| = \frac{1}{2}|AC| = |OD|$ segue que

$$|AO| = |DO| = |CO| = |BO|\,.$$

Consequentemente, os triângulos AOB , AOD , DOC e COB são retângulos em O e isósceles. Portanto, o ângulo $\widehat{ABC}$ é um ângulo reto, mostando assim que o triângulo ABC é retângulo.

6. **Mostre que não existem triângulos simultaneamente retângulos e isósceles cujas medidas dos lados sejam números inteiros.**

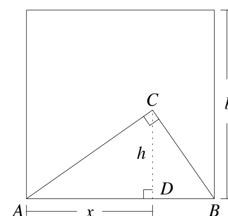
Solução Suponhamos que um tal triângulo existe. Seja $m \in \mathbb{Z}^+$ a medida de sua hipotenusa e seja $n \in \mathbb{Z}^+$ a medida de seus dois catetos. Segue do Teorema de Pitágoras que

$$m^2 = n^2 + n^2 = 2n^2 \implies 2 = \frac{m^2}{n^2} \implies \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

o que contradiz o fato que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Mostramos assim que não existem triângulos simultaneamente retângulos e isósceles cujas medidas dos lados sejam números inteiros.

7. **Um triângulo retângulo está contido num quadrado de tal forma que sua hipotenusa é um dos lados do quadrado, como mostrado na figura a seguir.**
(a) Use o Teorema de Pitágoras para determinar a relação entre h , x e o lado b do quadrado;
(b) Use essa relação para mostrar que $h \leq b/2$;
(c) Mostre que a igualdade ocorre quando, e somente quando, o triângulo é isósceles.

Solução Os triângulos ABC , ADC e DBC são triângulos retângulos.



(a) Assim, segue do Teorema de Pitágoras que:

$$\begin{aligned} x^2 + h^2 + (b-x)^2 + h^2 = b^2 &\iff x^2 - bx + h^2 = 0 \\ &\iff h^2 = x(b-x) . \end{aligned}$$

Consequentemente, $h = \sqrt{x(b-x)}$.

(b) Completando quadrados em $x^2 - bx + h^2 = 0$ obtemos:

$$h^2 = -x^2 + bx = -\left\{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}\right\} = \frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 .$$

Concluímos então que $h^2 \leq b^2/4$. Portanto, $h \leq b/2$.

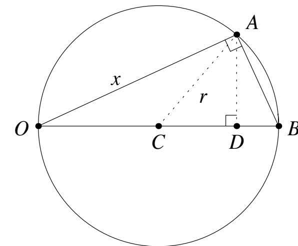
(c) Além disso, a igualdade acima mostra claramente que $h = b/2$ se, e somente se, $x = b/2$. E esse valor de x corresponde exatamente a um triângulo isósceles, já que nesse caso temos: $|AC| = |BC|$.

8. **Um triângulo retângulo está inscrito num círculo de raio r. Determine a relação entre a área A desse triângulo, o raio r do círculo e o comprimento x de um dos seus catetos. Mostre que $\mathcal{A} \leq r^2$ e que o valor r^2 só é atingido quando o triângulo for isósceles.**

Solução Primeiramente observemos que num triângulo retângulo inscrito num círculo, sua hipotenusa é um diâmetro do círculo.

Seja $x = |OA|$ como mostrado na figura ao lado, onde C é o centro do círculo. Os triângulos OAD e CAD são triângulos retângulos e temos então que:

$$|OD|^2 + |AD|^2 = x^2 \quad \text{e} \quad (|OD| - r)^2 + |AD|^2 = r^2.$$



Eliminando $|AD|^2$, obtemos:

$$|OD|^2 - (|OD| - r)^2 = x^2 - r^2 \implies 2r|OD| = x^2$$
$$\implies |OD| = \frac{x^2}{2r}.$$

Assim, a área $\mathcal{A}$ do triângulo fica dada por:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(2r)|AD| = r\sqrt{x^2 - |OD|^2} = r\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4r^2}} = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{4r^2 - x^2} \quad \text{onde} \quad x \in (0\,,2r)\,.$$

Para mostrar a desigualdade sugerida, completamos quadrado na expressão a seguir, obtendo:

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}\,x^2\,(4r^2 - x^2) = -\frac{1}{4}(x^4 - 4r^2x^2) = -\frac{1}{4}\Big\{(x^2 - 2r^2)^2 - 4r^4\Big\} = r^4 - \frac{1}{4}(x^2 - 2r^2)^2.$$

Assim, $\mathcal{A}^2 \le r^4$, ou seja, $\mathcal{A} \le r^2$, e a igualdade ocorre, quando e somente quando $x^2 = 2r^2$. Nesse caso, $x = r\sqrt{2}$ e $|OD| = x^2/(2r) = r$ mostrando que o triângulo OAB é um triângulo isósceles.

Exercícios

1. Quais das frações a seguir são iguais ?

   (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{80}}$ (c) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{30}}$ e $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

2. Usando o fato que $\sqrt{2}$ é *irracional*, responda a seguinte pergunta: quais dos números a seguir são racionais ? Justifique sua resposta.

   (a) $3\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}/2$ (c) $\sqrt{2}-5$.

3. Usando o fato que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π são números *irracionais*, pergunta-se: quais dos números a seguir são racionais ? Justifique sua resposta.

   (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$ (3) $\sqrt{2}-5$
   (4) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ (5) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (6) $\frac{\pi^2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\pi^2}$.

4. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas ? Justifique sua resposta.

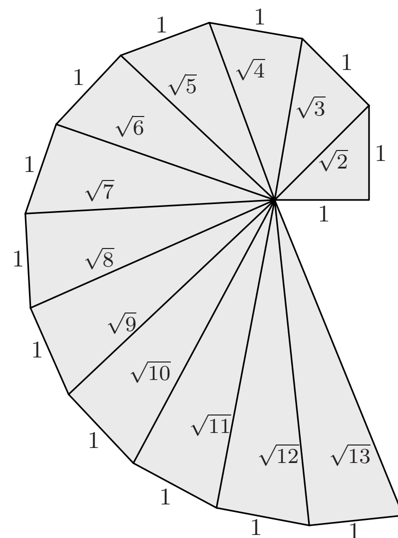
   (a) $a\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall a \in \mathbb{Z}^*$;
   (b) $a\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$;
   (c) $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}^*$;
   (d) $a - b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$;
   (e) Se $a, b \notin \mathbb{Q}$, então $a + b \notin \mathbb{Q}$;
   (f) Se $a, b \notin \mathbb{Q}$, então $ab \notin \mathbb{Q}$.

5. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras ? Justifique suas respostas.
   (a) A soma de números irracionais positivos é um número irracional ;
   (b) A diferença de números irracionais é um número irracional ;
   (c) O produto de números irracionais é um número irracional ;
   (d) O quociente de números irracionais não nulos é um número irracional.

6. Os números reais $\sqrt{2}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ e $\sqrt{3}$ são iguais ou distintos?

7. Os números reais[2] $\sqrt{75025}+\sqrt{121393}+\sqrt{196418}+\sqrt{317811}$ e $\sqrt{514229}+\sqrt{832040}$ são iguais ou distintos? Use o Mathematica ou o Maple para tentar uma aproximação...

8. Na figura a seguir os triângulos são retângulos, cada um deles têm um cateto unitário e as hipotenusas valem $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots, \sqrt{13}$ respectivamente.



Prossiga no desenvolvimento da figura até chegar em $\sqrt{20}$.

Se você prosseguisse indefinidamente marcando $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{20}, \ldots$ qual seria o aspecto da curva formada pelos catetos unitários ?

9. Use o *Maple* ou o *Mathematica* para fazer a figura acima até atingir $\sqrt{40}$.

10. Para cada item, construa um subconjunto do conjunto dado, formado apenas de números irracionais e que tenha uma infinidade de elementos.

    (a) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\}$;
    (b) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 2{,}001\}$.

[2] Extraído de *When close enough is close enough, The American Mathematical Monthly, June-July, pp 489–499, 2000.*

11. Seja b um número real positivo. Construa uma infinidade de números irracionais no intervalo $(0, b)$.

12. Sejam $0 < a < b$. Construa uma infinidade de números irracionais no intervalo (a, b).

13. A raiz quadrada de um inteiro positivo e ímpar é um número irracional ?

14. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que $\sqrt{n}$ é um inteiro se, e somente se, n é um quadrado[3] perfeito.

15. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que se n não é um quadrado perfeito então $\sqrt{n}$ é irracional.

16. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que $\sqrt{1+n^2}$ é irracional.

17. Mostre que todo número inteiro pode ser colocado na forma $b\sqrt{2}+2$ onde b é um número real.

18. Mostre que todo número real pode ser colocado na forma $\pi b - 1$ onde b é um número real.

19. Enuncie e resolva exercícios semelhantes aos dois últimos.

20. Repita os argumentos da seção 1 para mostrar que $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

21. Generalize esse resultado para as raízes de ordem n de 5 e prove sua generalização proposta.

22. Usando os argumentos da seção 1 podemos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional ? E sobre $\sqrt{3}$?

23. Será que a raiz quadrada de um número primo é um número irracional ?

24. Será possível generalizar esse resultado para raízes de ordem n onde $n \geq 2$ é um número inteiro ?

[3]Um inteiro $n \geq 0$ é um *quadrado perfeito* quando $n = m^2$ para algum inteiro m.

9

Resolução de equações

Uma *equação* é uma igualdade na qual figura uma *incógnita*. *Resolver* uma equação em $\mathbb{R}$ é encontrar os *valores reais da incógnita* que satisfazem a igualdade. O conjunto formado por esses valores é dito *conjunto solução da equação* e será frequentemente denotado pela letra $\mathcal{S}$.

Agora, vamos estudar alguns tipos de equações, começando pelas mais simples. A tática para resolver equações é sempre a mesma: reduzí-las a *equações elementares*. Além disso, convencionamos aqui que resolver uma equação significa determinar suas soluções reais.

1 Algumas equações elementares

Algumas equações são de resolução imediata. Por exemplo:

☞ $x^2 = 0 \iff x = 0\,;$
$\mathcal{S} = \{0\}\,.$

☞ $x^4 = 0 \iff x = 0\,;$
$\mathcal{S} = \{0\}\,.$

☞ $2x = 3 \iff x = 3/2\,;$
$\mathcal{S} = \{3/2\}\,.$

☞ $x^5 = 0 \iff x = 0\,;$
$\mathcal{S} = \{0\}\,.$

☞ $x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}\,;$
$\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3}\}\,.$

☞ $x^2 = -3$ não tem soluções;
$\mathcal{S} = \emptyset\,.$

☞ $x^3 = -8 \iff x = -2\,;$
$\mathcal{S} = \{-2\}\,.$

☞ $x^3 = 1 \iff x = 1\,;$
$\mathcal{S} = \{1\}\,.$

☞ $|x| = \pi \iff x = \pm\pi\,;$
$\mathcal{S} = \{-\pi\,,\pi\}\,.$

☞ $|x| = -1$ não tem soluções;
$\mathcal{S} = \emptyset$.

☞ $x^4 = 2 \iff x = \pm\sqrt[4]{2}$;
$\mathcal{S} = \{-\sqrt[4]{2}\,,\ \sqrt[4]{2}\}$.

☞ $\sqrt{x} = 1 \iff x = 1$;
$\mathcal{S} = \{1\}$.

☞ $\sqrt[3]{x} = 2 \iff x = 8$.
$\mathcal{S} = \{8\}$.

☞ $\sqrt{|x|} = 1 \iff x = \pm 1$.
$\mathcal{S} = \{-1\,,\ 1\}$.

☞ $\sqrt[3]{|x|} = 2 \iff x = \pm 8$.
$\mathcal{S} = \{-8\,,\ 8\}$.

☞ $|x| = x \iff x \geq 0$.
$\mathcal{S} = [\,0\,,\infty)$.

☞ $|x| + x = 0 \iff x \leq 0$.
$\mathcal{S} = (-\infty, 0\,]$.

☞ $|x| + x^4 = 0 \iff x = 0$.
$\mathcal{S} = \{0\}$.

Outras equações não são de resolução tão imediata mas podem ser resolvidas por um processo simples. É o caso, por exemplo das equações do primeiro e segundo graus que estudaremos a seguir. Veremos, também, uma estratégia que permite reduzir certas equações a equações dos tipos acima citados: isso é feito através de uma operação dita *mudança de variável*. Veremos essa bela estratégia de solução logo após o estudo das equações do primeiro e segundo graus.

2 Equação do primeiro grau

Uma *equação do primeiro grau* é uma equação da forma

$$ax + b = 0 \quad \text{onde} \quad a\,,\, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a \neq 0}\,. \tag{9.1}$$

A expressão[1] no primeiro membro da igualdade (9.1) é dita *expressão do primeiro grau*. Os parâmetros $a\,,\, b$ são, respectivamente, o *coeficiente do termo de primeiro grau* e o *termo independente* da expressão $ax + b$.

Como $a \neq 0$, a resolução da equação (9.1) é feita através da sequência de simplificações:

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = \frac{b}{a}\,.$$

Assim, o conjunto solução da equação (9.1) é: $\mathcal{S} = \big\{-b/a\big\}$.

A solução da equação (9.1) também é dita *raiz* ou *zero* da expressão de primeiro grau.

[1]Não confunda *expressão do primeiro grau* com *equação do primeiro grau*. Uma expressão do primeiro grau, como dissemos acima, é uma expressão da forma $E(x) = ax + b$ onde $a\,, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Note também que a expressão $E(x) = b$ não é do primeiro grau pois o coeficiente do termo de primeiro grau é nulo.

Exemplos

❄ $2x+1$ é uma expressão do primeiro grau.

O coeficiente do termo de primeiro grau vale 2;
O termo independente vale 1.

A solução da equação $2x+1=0$ é:

$2x+1=0 \iff 2x=-1 \iff x=-1/2$.

Portanto, $\mathcal{S}=\{-1/2\}$.

❄ $x-3$ é uma expressão do primeiro grau.

O coeficiente do termo de primeiro grau vale 1;
O termo independente vale -3.

A solução da equação $x-3=2$ será

$x-3=2 \iff x=5$.

Portanto, $\mathcal{S}=\{5\}$.

❄ Na expressão $\pi-5x$ temos:

O coeficiente do termo de primeiro grau vale -5;
O termo independente vale π;

A equação $\pi-5x=1$ tem a seguinte solução:

$\pi-5x=1 \iff 5x=\pi-1 \iff x=\dfrac{\pi-1}{5}$.

Portanto, $\mathcal{S}=\{(\pi-1)/5\}$.

❄ $2|x|-3$ não é uma expressão do primeiro grau[2], pois não é da forma $ax+b$. No entanto, podemos resolver a equação $2|x|-3=0$ imitando a resolução para equações do primeiro grau:

$2|x|-3=0 \iff |x|=3/2 \iff x=\pm\frac{3}{2}$.

Portanto, $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\,,\,\frac{3}{2}\right\}$.

Voltando a expressão do primeiro grau, temos que:

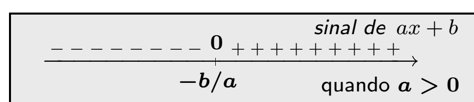
$$ax+b=a\Big(x+\frac{b}{a}\Big) \qquad \text{já que } a\neq 0. \tag{9.2}$$

Colocada nessa forma, fica fácil não apenas determinar onde a expresssão se anula (o que já fizemos), como também, analizar o sinal dela. Podemos então concluir sobre a expressão em (9.2) que:

☞ Se anula em $-b/a$;

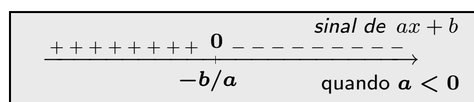
☞ Quando $a>0$ temos:

- ➙ $ax+b$ é positivo à direita de $-b/a$;
- ➙ $ax+b$ é negativo à esquerda de $-b/a$;



☞ Quando $a<0$ temos:

- ➙ $ax+b$ é negativo à direita de $-b/a$;
- ➙ $ax+b$ é positivo à esquerda de $-b/a$;

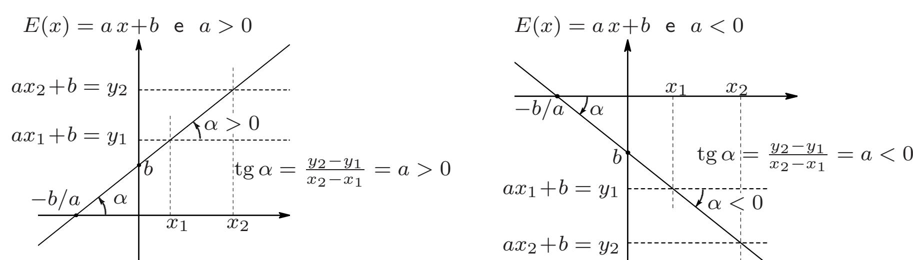


como exibido nas figuras ao lado.

[2]De fato podemos entender que a expressão $E(x)=2|x|-3$ é uma *expressão do primeiro grau na variável* $|x|$. Igualmente, entendemos que a expressão $E(x)=a|x|+b$ é uma expressão do primeiro grau na variável $|x|$ quando $a\neq 0$.

Note que $ax + b$ não muda de sinal quando estamos à direita (resp. esquerda) de $-b/a$. Portanto, para descobrir o sinal à direita (resp. esquerda) de $-b/a$ basta avaliar a expressão $ax + b$ num ponto à direita (resp. esquerda) de $-b/a$.

O gráfico de uma expressão do primeiro grau é uma reta. Tal reta é *não horizontal* já que o coeficiente do termo do primeiro grau é, por definição, não nulo. As figuras a seguir mostram o gráfico da expressão do primeiro grau $E(x) = a\,x + b$ quando $a > 0$ e quando $a < 0$.



Note que para $x_1 \neq x_2$ temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = a.$$

Por isso o coeficiente do termo de primeiro grau é dito *coeficiente angular* da expressão de primeiro grau $E(x) = a\,x + b$.

Por outro lado, em $x = 0$ a expressão $ax{+}b$ vale b. Isso significa que o termo independente dessa expressão é o ponto do eixo vertical por onde passa o seu gráfico.

Além disso, o ponto onde a expressão $a\,x + b$ se anula é o ponto do eixo horizontal por onde passa seu gráfico.

Quando $a > 0$ dizemos que a expressão $E(x) = a\,x + b$ é *crescente* já que $E(x)$ aumenta quando x aumenta. Analogamente, dizemos que $E(x) = a\,x + b$ é *decrescente* quando $a < 0$.

Observe que o ângulo α que o gráfico da expressão do primeiro grau faz com o sentido positivo do eixo das abcissas está compreendido entre $-\pi/2$ e $\pi/2$. Ele está:

- ☛ entre $-\pi/2$ e zero quando $a < 0$;
- ☛ entre zero e $\pi/2$ quando $a > 0$.

3 Equação do segundo grau

Uma *equação do segundo grau* é uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{onde} \quad a\,,\,b\,,\,c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a \neq 0}\,. \tag{9.3}$$

A expressão[3] no primeiro membro da igualdade (9.3) é denominada *trinômio do segundo grau*. Os parâmetros a, b, c são, respectivamente, o *coeficiente do termo de segundo grau*, o *coeficiente do termo de primeiro grau* e o *termo independente* do trinômio.

As soluções da equação (9.3) são chamadas *raízes* ou *zeros* do trinômio $ax^2 + bx + c$.

Veremos agora a exuberância do método de completar quadrados na análise dessa expressão. Completando quadrado como fizemos no exercício **??** da página 93 podemos escrever:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\Big\{\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big\} \\ &= a\Big\{\underbrace{\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2}_{\geq 0} - \frac{\Delta}{4a^2}\Big\}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

onde $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ é dito *discriminante* do trinômio $ax^2 + bx + c$.

A primeira conclusão importante que tiramos de (9.4) é que a expressão do segundo grau $ax^2 + bx + c$ assume os mesmos valores nos pontos[4]

$$-\frac{b}{2a} + \lambda \qquad \text{e} \qquad -\frac{b}{2a} - \lambda$$

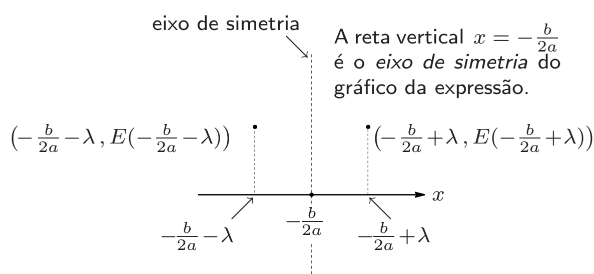
qualquer que seja o número real λ. Vejamos:

$$\begin{aligned} a\Big(-\frac{b}{2a} \pm \lambda\Big)^2 + b\Big(-\frac{b}{2a} \pm \lambda\Big) + c &= a\Big\{\Big(-\frac{b}{2a} \pm \lambda + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big\} \\ &= a\Big\{(\pm\lambda)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big\} = a\Big\{\lambda^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big\} \end{aligned}$$

Esse cálculo nos mostra que o gráfico da expressão $E(x) = ax^2 + bx + c$ é simétrico em relação a reta vertical de equação $x = -\frac{b}{2a}$ pois acabamos de mostrar que

$$E\Big(-\frac{b}{2a} + \lambda\Big) = E\Big(-\frac{b}{2a} - \lambda\Big)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tal reta é dita *eixo de simetria* do gráfico da expressão.



Outra conclusão importante que é explicita em (9.4) é a seguinte:

[3]Novamente, não confunda *expressão do segundo grau* com *equação do segundo grau*. Uma expressão do segundo grau, como dissemos acima, é uma expressão do tipo $E(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

[4]Lembre-se que os pontos $-\frac{b}{2a} \pm \lambda$ são simétricos em relação ao centro de simetria $-\frac{b}{2a}$

- Quando o coeficiente $a > 0$ a expressão $ax^2 + bx + c$ assume em $x = -\frac{b}{2a}$ o seu *menor valor* que é $-\frac{\Delta}{4a}$ e tal valor ocorre quando x vale $-\frac{b}{2a}$;

  Isso é conseqüência do fato que $a\Big(x + \dfrac{b}{2a}\Big)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Quando o coeficiente $a < 0$ a expressão $ax^2 + bx + c$ assume em $x = -\frac{b}{2a}$ o seu *maior valor* que é $-\frac{\Delta}{4a}$ e tal valor ocorre quando x vale $-\frac{b}{2a}$.

  Isso é conseqüência do fato que $a\Big(x + \dfrac{b}{2a}\Big)^2 \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em ambos os casos, $-\frac{\Delta}{4a}$ é dito *valor extremo* da expressão $ax^2 + bx + c$. No caso em que $a > 0$ (resp. $a < 0$) dizemos que $x = -\frac{b}{2a}$ é o *ponto de mínimo* (resp. *de máximo*) da expressão.

Para finalizar a solução da equação (9.3), voltemos à igualdade (9.4) e consideremos os seguintes casos:

☞ **Caso 1:** $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$

Nesse caso, a equação (9.3) não tem solução, já que $a \neq 0$ e a parte da expressão (9.4) entre chaves fica positiva. Além disso, a expressão em (9.4) nos garante o seguinte sinal para a expressão $ax^2 + bx + c$:

- ☛ $ax^2 + bx + c > 0$ quando $a > 0$;
- ☛ $ax^2 + bx + c < 0$ quando $a < 0$;

isto é, $ax^2 + bx + c$ tem sempre o sinal de a.

☞ **Caso 2:** $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$

Nesse caso, (9.4) é um produto notável e temos

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \tag{9.5}$$

o que nos fornece duas soluções distintas

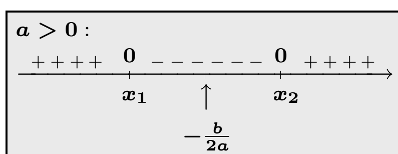
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

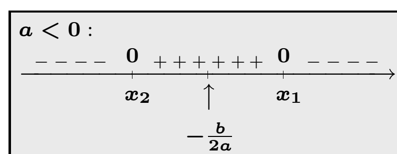
para a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Assim, fatoração apresentada em (9.5) toma a forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{onde } x_1 \text{ e } x_2 \text{ são dados acima.}$$

De posse dessa fatoração e, tendo em vista o estudo de sinal feito para expressões do primeiro grau, podemos concluir a seguinte distribuição de sinais para $ax^2 + bx + c$ quando $\boldsymbol{\Delta > 0}$.





Repare que o sinal da expresão não muda quando estamos entre as raízes: ele é sempre positivo ou sempre negativo, dependendo do sinal de a. Idem para quando estamos à direita ou à esquerda delas. Isso nos garante que para conhecer o sinal que a expressão tem entre as raízes basta calcular o valor da expressão num ponto entre essas raízes. O mesmo ocorre quando estamos à direita (resp. esquerda) das raízes. Observe também que $x_1 < x_2$ quando $a > 0$ e $x_1 > x_2$ quando $a < 0$.

Além disso, dados $x_1 \, , x_2 \in \mathbb{R}$ temos que

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \tag{9.6}$$

ou seja, num trinômio do segundo grau da forma $x^2 - \lambda x + \mu$ temos:

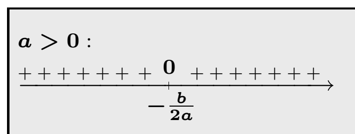
- o produto das raízes vale μ ;
- a soma das raízes vale λ .

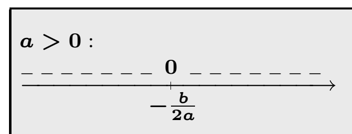
☞ **Caso 3: $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$**

Nesse caso, voltando a (9.4) concluímos que

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2.$$

Segue daí que a expressão se anula em um único ponto, a saber, $-\frac{b}{2a}$. Nesse caso dizemos que o trinômio $ax^2 + bx + c$ tem uma única raíz e que tal raíz tem *multiplicidade 2*. Também é fácil descrever a distribuição de sinais: ela é determinada pelo sinal de a.





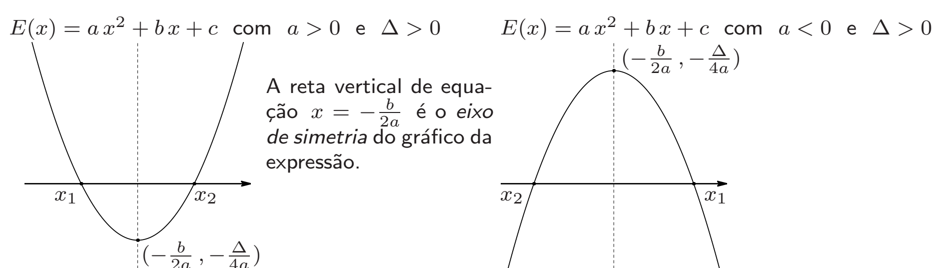
Apresentamos no quadro abaixo um resumo das conclusões obtidas sobre as expressões do segundo grau.

$\boldsymbol{a\,,b\,,c \in \mathbb{R}}$ e $\boldsymbol{a \neq 0}$			
Expressão do 2º grau: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$			
Equação do 2º grau: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$			
Discriminante: $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$			
	$\boldsymbol{\Delta > 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta < 0}$
Raízes da equação	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	sem raízes
Fatoração da expressão	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	
Sinal da expressão	$\boldsymbol{a > 0}$: $+ + + +$ $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x_1}$) $- - - - - -$ $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x_2}$) $+ + + +$ $\boldsymbol{a < 0}$: $- - - -$ $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x_2}$) $+ + + + + +$ $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x_1}$) $- - - -$	$\boldsymbol{a > 0}$: $+ + +$ $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x_0}$) $+ + + +$ $\boldsymbol{a < 0}$: $- - -$ $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x_0}$) $- - - -$	$\boldsymbol{a > 0}$: $+ + + + + + + + +$ $\boldsymbol{a < 0}$: $- - - - - - - -$

☛ Nota: Faz sentido falar no sinal do trinômio $ax^2 + bx + c$ mas *não faz sentido falar no sinal da equação* $ax^2 + bx + c = 0$.

Exibiremos agora gráficos de expressões do segundo grau, também conhecidos como *parábola*, nos casos em que as equações correspondentes possuem:

- **Duas raízes reais:**



Vimos que o gráfico de uma expressão do segundo grau tem a reta $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria. Além disso, sendo $\Delta > 0$, suas raízes tem a forma

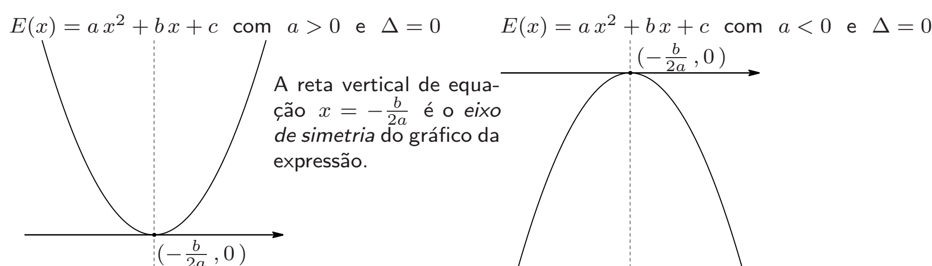
$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ou seja, elas são simétricas em relação a esse eixo.

Vimos também que:

- quando $a > 0$ e $\Delta > 0$ a expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *menor valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a} < 0$;
- quando $a < 0$ e $\Delta > 0$ a expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *maior valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a} > 0$.

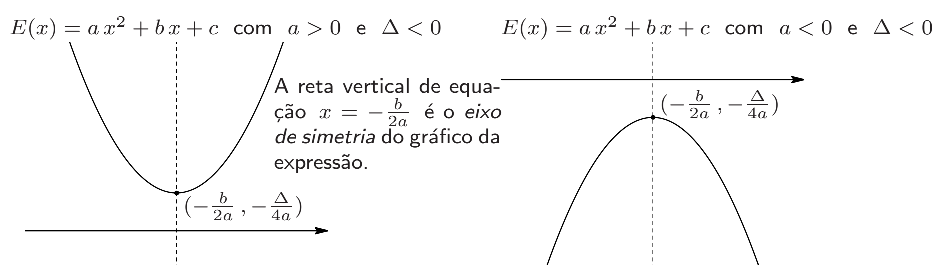
- **Uma única raíz real:**



Aqui temos uma única raíz real dada por $x = -\frac{b}{2a}$. Além disso, segue da igualdade em (9.4) que:

- quando $a > 0$ e $\Delta = 0$ a expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *menor valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a 0;
- quando $a < 0$ e $\Delta = 0$ a expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *maior valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a 0.

- **Sem raízes reais:**



Aqui não temos raízes reais o que é refletido no fato que o gráfico da expressão não intersecta o eixo horizontal. Além disso, segue da igualdade em (9.4) que:

- quando $a > 0$ e $\Delta < 0$ a expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *menor valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a} > 0$;

– quando $a < 0$ e $\Delta > 0$ a expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *maior valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a} < 0$.

Exemplos

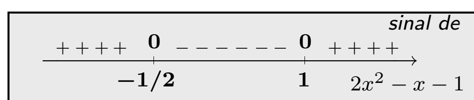
❄ As raízes do trinômio $2x^2 - x - 1$ são:

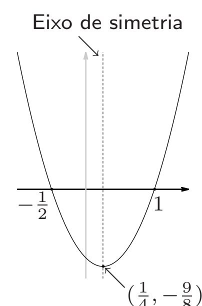
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}.$$

Isto é, $x_1 = -1/2$ e $x_2 = 1$. Podemos também concluir que

$$2x^2 - x - 1 = 2\Big(x - 1\Big)\Big(x + \frac{1}{2}\Big) = (x-1)(2x+1).$$

O sinal desse trinômio é mostrado na figura a seguir.





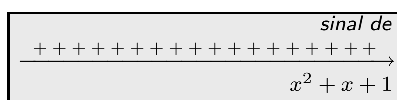
Por outro lado, completando quadrado em $2x^2 - x - 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 1 &= 2\Big(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\Big) = 2\Big[\Big(x - \frac{1}{4}\Big)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\Big] \\ &= 2\Big[\Big(x - \frac{1}{4}\Big)^2 - \frac{9}{16}\Big] \end{aligned}$$

Segue daí que:

- a reta $x = 1/4$ é o eixo de simetria do gráfico da expressão;
- o menor valor que a expressão assume é $-9/8$ o qual é assumido no ponto $1/4$.

❄ A equação $x^2 + x + 1 = 0$ não tem raízes (reais) pois $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Como o coeficiente to termo de segundo grau é positivo, o sinal do trinômio $x^2 + x + 1$ é sempre positivo:



❄ Os pontos onde a expressão $4x^2 - 12x + 9$ se anula são:

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 4 \times 9}}{2 \times 4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{3}{2}.$$

Portanto, a expressão em estudo se anula em um único ponto.

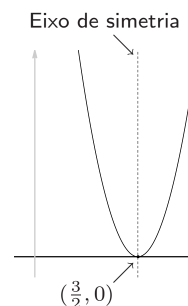
Além disso, podemos escrever:

$$4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (2x-3)^2 \qquad (9.7)$$

Consequentemente, temos a seguinte tabela de sinal:

+ + + + + + + + + **0** + + + + + + + + +		*sinal de*
	$\frac{3}{2}$	$4x^2 - 12x + 9$

De (9.7) concluímos que o menor valor que a expressão assume é zero e isso ocorre no ponto $3/2$. Seu eixo de simetria é a reta de equação $x = 3/2$. O gráfico dessa expressão é mostrado na figura ao lado.



❄ As raízes de $x^2 - 3x - 4$ são: $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$ pois $x_1 \times x_2 = -4$ e $x_1 + x_2 = 3$.

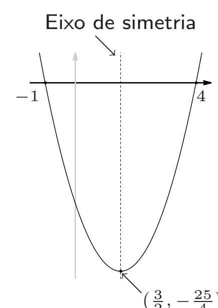
Logo, temos a fatoração $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$ e o sinal desse trinômio é:

+ + + + **0** − − − − − − **0** + + + +			*sinal de*
	-1	4	$x^2 - 3x - 4$

Completanto quadrados na expressão $x^2 - 3x - 4$ obtemos:

$$x^2 - 3x - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Segue agora que o eixo de simetria é a reta de equação $x = 3/2$. O menor valor assumido por essa expressão é $-25/4$ e ocorre no ponto $3/2$. Seu gráfico é mostrado na figura ao lado.



❄ A expressão $-x^2 + 2x + 2$ se anula nos seguintes pontos:

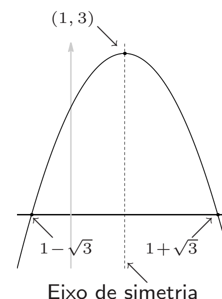
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{2 \mp \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \mp 2\sqrt{3}}{2} = 1 \mp \sqrt{3}\,.$$

Assim sendo, podemos escrever a fatoração: $-x^2 + 2x + 2 = -\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)$ e temos o seguinte quadro de sinais.

− − − − **0** + + + + + + **0** − − − −			*sinal de*
	$1 - \sqrt{3}$	$1 + \sqrt{3}$	$-x^2 + 2x + 2$

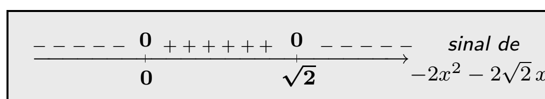
Completando quadrados temos:

$$\begin{aligned}-x^2+2x+2 &= -(x^2-2x-2)\\ &= -[(x-1)^2-1-2] = -[(x-1)^2-3]\\ &= -(x-1)^2+3\,.\end{aligned}$$



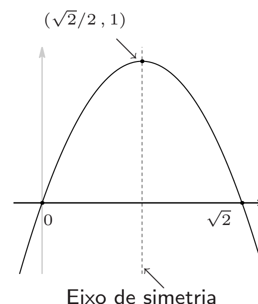
Conseqüentemente, o eixo de simetria é a reta de equação $x = 1$. Além disso, o maior valor que a expressão assume é 3 e isso ocorre no ponto 1. Seu gráfico é mostrado na figura ao lado.

❄ Considere a expresssão $-2x^2+2\sqrt{2}\,x$. Temos que $-2x^2+2\sqrt{2}\,x = 2x\,(\sqrt{2}-x)$ o que nos garante que os pontos onde a expressão se anula são: 0 e $\sqrt{2}$. O sinal dessa expressão é mostrado na figura a seguir.



Por outro lado, completando quadrados, obtemos:

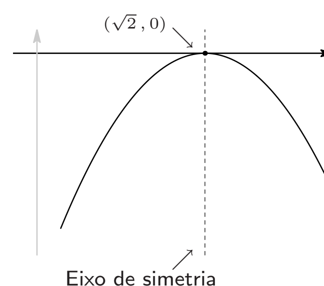
$$\begin{aligned}-2x^2+2\sqrt{2}\,x &= -(2x^2-2\sqrt{2}\,x)\\ &= -[(\sqrt{2}\,x-1)^2-1] = -(\sqrt{2}\,x-1)^2+1\end{aligned}$$



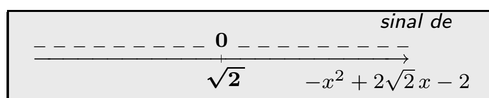
Consequentemente, o eixo de simetria é a reta de equação $\sqrt{2}\,x = 1$. O maior valor que a expressão assume é 1 e isso ocorre no ponto $1/\sqrt{2}$. Na figura ao lado exibimos o gráfico da expressão.

❄ Completando quadrado na expressão $-x^2+2\sqrt{2}\,x-2$ obtemos:

$$-x^2+2\sqrt{2}\,x-2 = -(x-\sqrt{2})^2\,. \tag{9.8}$$



Concluímos daí que a referida expressão se anula somente no ponto $\sqrt{2}$. Como o coeficiente do termo de segundo grau é negativo, o sinal da expressão $-x^2+2\sqrt{2}\,x+2$ é:



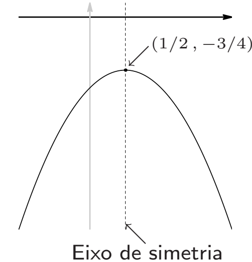
Além disso, concluímos de (9.8) que o maior valor assumido por essa expressão ocorre em $\sqrt{2}$ e vale zero. O eixo de simetria do gráfico dessa expressão é a reta de equação $x=\sqrt{2}$.

❄ A expresão $-x^2+x-1$ não se anula pois o seu discriminante $\Delta = 1^2-4\times(-1)\times(-1) = -3 < 0$. Como o coeficiente to termo de segundo grau é negativo, o sinal dessa expressão é:

sinal de

$- - - - - - - - - - - - - - - - - - - \longrightarrow$

$-x^2 + x - 1$



Completanto quadrados, obtemos:

$$
\begin{aligned}
-x^2 + x - 1 &= -(x^2 - x + 1) \\
&= -\Big[\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} + 1\Big] = -\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{3}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Logo, a expressão em questão assume seu maior valor no ponto $1/2$ e esse valor é $-3/4$.

4 Mudança de variável

Considere a equação

$$(x^2 - 1)^2 = 3\,. \tag{9.9}$$

Vamos simplificar essa equação descrevendo-a em termos de uma nova variável y . Para isso, precisamos dizer qual a relação entre y e x . Além disso, precisamos de uma relação entre y e x que de fato, simplifique a equação. Vamos descobrí-la, claro, na própria equação.

Coloquemos então a seguinte relação entre y e x :

$$y = x^2 - 1\,. \tag{9.10}$$

A equação inicial, descrita em termos da nova variável y , toma a forma:

$$y^2 = 3 \tag{9.11}$$

a qual sabemos resolver, com facilidade: $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$.

Acabamos de resolver a equação (9.9), só que a solução está descrita em termos da nova variável y . Precisamos agora expressar essas soluções em termos da variável x usando a fórmula (9.10), dita *fórmula de mudança de variável* para a equação em questão.

Para finalizar a solução do problema, precisamos executar dois passos.

☞ **Passo 1:** para $y = \sqrt{3}$.

Nesse caso temos:

$\sqrt{3} = x^2 - 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 = \sqrt{3} + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \pm\sqrt{\sqrt{3} + 1}\,.$

☞ **Passo 2:** para $y = -\sqrt{3}$.

Nesse caso teremos:

$-\sqrt{3} = x^2 - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = -\sqrt{3} + 1 < 0$.

Isso significa que não temos soluções relacionadas a $y = -\sqrt{3}$.

Resulta então que o conjunto solução da equação (9.9) é:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{\sqrt{3}+1} \ , \ \sqrt{\sqrt{3}+1} \right\}.$$

Exercícios resolvidos

1. **Determine o valor de b sabendo que a média aritmética entre b , 12 e 7 vale 15.**

Solução Da definição de média aritmética temos que

$$\frac{b+12+7}{3} = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad b + 19 = 45 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 26 .$$

2. **A soma de cinco números pares consecutivos vale 150 . Qual é o maior desses números ?**

Solução Seja n o maior desses cinco números. Assim, $n+(n-2)+(n-4)+(n-6)+(n-8) = 150$. Logo, $5n = 150 - 20 = 130$. Donde, $n = 26$.

3. **Se a soma de quatro múltiplos consecutivos de 3 vale x , quanto vale em termos de x, o menor desses números ?**

Solução Seja p o menor desses múltiplos de 3. Assim,

$$p + (p+3) + (p+6) + (p+9) = x \quad \Longleftrightarrow \quad 4p = x - 18 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{x-18}{4} .$$

4. **A média aritmética de dez números vale 20. Sabendo que a soma dos sete primeiros vale 80, determine a média aritmédica dos três últimos.**

Solução Sejam $a_1, \ldots, a_{10}$ os dez números em questão. Temos que $\dfrac{a_1 + \cdots + a_{10}}{10} = 20$. Como a soma dos sete primeiros vale 80, concluímos que

$$\frac{80 + a_8 + a_9 + a_{10}}{10} = 20 \implies a_8 + a_9 + a_{10} = 120 \implies \frac{a_8 + a_9 + a_{10}}{3} = 40\,.$$

Mostramos assim que a média aritmética dos três últimos vale 40.

5. **Resolva as equações**

(a) $\mathbf{2x + 1 = 7}$ **(b)** $\mathbf{2(x-1) = 3(2-x)}$ **(c)** $\mathbf{\dfrac{2x-3}{1-x^2} = 0.}$

Solução Temos que:

(a) $2x + 1 = 7 \iff 2x = 6 \iff x = 3 \quad \therefore \quad \mathcal{S} = \{3\}$.

(b) $2(x-1) = 3(2-x) \iff 2x-2 = 6-3x \iff 5x = 8 \iff x = 8/5 \quad \therefore \quad \mathcal{S} = \{8/5\}$.

(c) Para isso devemos determinar os pontos onde o numerador da expressão se anula. Temos então:

$$2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = 3/2\,.$$

Por outro lado, nesse ponto o denominador da expressão não se anula. Portanto, $\mathcal{S} = \{3/2\}$.

6. **Uma quantia Q em reais deve ser distribuída entre três pessoas. A primeira delas recebe $2/5$ dessa quantia, a segunda recebe $62{,}5\%$ do que recebeu a primeira e o restante foi dado a terceira pessoa. Sabendo que essa última recebeu 350 reais, determine a quantia Q e quanto recebeu as duas primeiras pessoas.**

Solução A primeira pessoa recebeu $\dfrac{2}{5}Q$. A segunda recebeu $62{,}5\%$ de $\dfrac{2}{5}Q$, ou seja, $\dfrac{62{,}5}{100}\left(\dfrac{2}{5}Q\right)$.

Resulta então que:

$$\frac{2}{5}Q + \frac{62{,}5}{100}\left(\frac{2}{5}Q\right) + 350 = Q \iff \frac{2}{5}Q + \frac{1}{4}Q + 350 = Q \iff Q - \frac{2}{5}Q - \frac{1}{4}Q = 350$$

$$\iff \frac{20-8-5}{20}Q = 350 \iff Q = \frac{350 \times 20}{7} = 1000\,.$$

Consequentemente:

- ☛ $Q = 1000\,reais$;
- ☛ A primeira pessoa recebeu: $\dfrac{2}{5} \times 1000 = 400\,reais$;
- ☛ A segunda pessoa recebeu: $1000 - 400 - 350 = 250\,reais$.

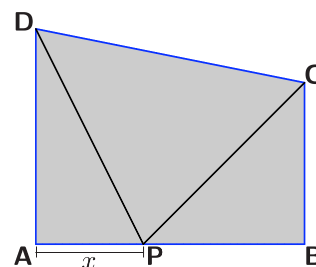
7. **Considere o trapézio $ABCD$ retângulo em A e B, e seja P um ponto do segmento AB distinto dos pontos A e B, como mostrado na figura ao lado. É dado que $AB = 5$, $BC = 3$ e $AD = 4$. Sabendo que o comprimento do segmento AP vale x, determine:**

   (a) o intervalo de variação de x;

   (b) a área do triângulo APD;

   (c) a área do triângulo PBC;

   (d) a área do triângulo PCD.



Solução Comecemos pelo primeiro item.

(a) Como $AB = 5$ segue que o intervalo de variação de x é o intervalo $(0, 5)$.

Note que a área dos triângulos **APD**, **PBC** e **PCD** dependem[5] da posição do ponto **P**, isto é, dependem da variável $x \in [0, 5]$.

(b) A área do triângulo **APD** vale: $\frac{4x}{2} = 2x$.

(c) A área do triângulo **PBC** vale: $\frac{3(5-x)}{2}$.

(d) A área do triângulo **PCD** é a diferença entre a área do trapézio e as áreas dos outros dois triângulos. Para isso precisamos calcular a área do trapézio.

Área do trapézio: $5 \times 3 + \frac{5 \times (4-3)}{2} = \frac{30}{2} + \frac{5}{2} = \frac{35}{2}$.

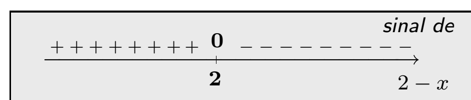
Consequentemente, a área do triângulo **PCD** será: $\frac{35}{2} - \frac{4x}{2} - \frac{15-3x}{2} = \frac{20-x}{2}$.

8. **Estude o sinal das expressões:**

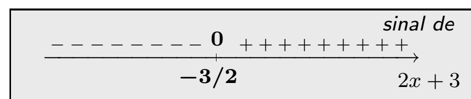
   (a) $2 - x$ (b) $2x + 3$ (c) $3x - 1$ (d) $2|x| - 5$ (e) $3 - 5|x|$.

Solução Primeiramente vamos determinar os pontos onde essas expressões se anulam.

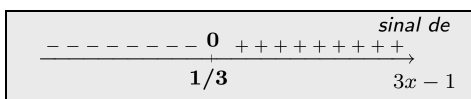
(a) Temos que: $2 - x = 0 \iff x = 2$.
Como o coeficiente do termo de primeiro grau é negativo, temos o seguinte quadro de sinais para $2 - x$:



(b) Temos que: $2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$.
Como o coeficiente do termo de primeiro grau é positivo, temos o seguinte quadro de sinais para $2 - x$:



(c) Temos que: $3x - 1 = 3(x - \frac{1}{3})$.
Portanto, a expressão é positiva à direta de $1/3$, é negativa à esquerda e nula em $x = 1/3$.



[5]Note que, mesmo antes de calcular a área do triângulo **APD** podemos concluir que sua área *tende* à zero a medida que **P** se aproxima de **A**. Essa informação estará contida na expressão da área do referido triângulo. O mesmo vale para o triângulo **PBC** quando **P** se aproxima de **B**.

(d) Temos que: $2|x| - 5 = 2(|x| - 5/2)$.

Essa expressão se anula em:

$$|x| - 5/2 = 0 \iff |x| = 5/2 \iff x = \pm 5/2\,.$$

Ela será positiva quando:

$$|x| - 5/2 > 0 \iff |x| > 5/2 \iff x \in (-\infty\,, -5/2\,) \cup (\,5/2\,, \infty)\,.$$

Ela será negativa quando:

$$|x| - 5/2 < 0 \iff |x| < 5/2 \iff x \in (-5/2\,, 5/2\,)\,.$$

Seu quadro de sinais é o seguinte:

					sinal de
+ + + + +	**0**	− − − − − −	**0**	+ + + + +	
	$\mathbf{-5/2}$		$\mathbf{5/2}$		$2|x| - 5$

(e) Temos que: $3 - 5|x| = -5(|x| - 3/5)$.

Da simplificação acima, concluímos que a expressão $3 - 5|x|$ se anula em:

$$|x| - 3/5 = 0 \iff |x| = 3/5 \iff x = \pm 3/5\,.$$

Ela será positiva quando:

$$|x| - 3/5 < 0 \iff |x| < 3/5 \iff x \in (-3/5\,, 3/5\,)\,.$$

Ela será negativa quando:

$$|x| - 3/5 < 0 \iff |x| < 3/5 \iff x \in (-\infty\,, -3/5\,) \cup (\,3/5\,, \infty)\,.$$

Seu quadro de sinais é o seguinte:

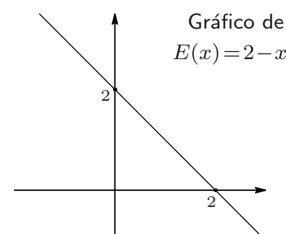
					sinal de
− − − − −	**0**	+ + + + + +	**0**	− − − − −	
	$\mathbf{-3/5}$		$\mathbf{3/5}$		$3 - 5|x|$

9. **Esboce o gráfico das seguintes expressões indicando os pontos onde o gráfico intersecta o eixos das abacissas e o eixo das ordenadas.**

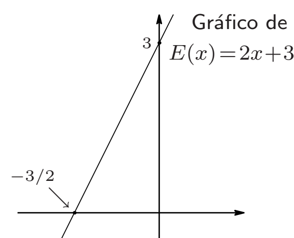
(a) $\mathbf{2 - x}$ **(b)** $\mathbf{2x + 3}$ **(c)** $\mathbf{3x - 1}$ **(d)** $\mathbf{2|x| - 5}$ **(e)** $\mathbf{3 - 5|x|}$**.**

Solução No problema anterior, determinamos os pontos onde tais expressões se anula.

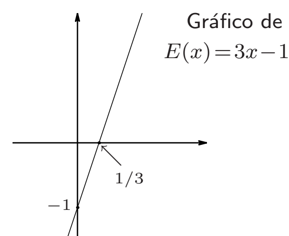
(a) Como a expressão $E(x) = 2 - x$ se anula em $x = 2$ segue que seu gráfico corta o eixo das abcissas no ponto $(\,2\,, 0\,)$. Por outro lado, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = 2$. Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(\,0\,, 2\,)$. Conseqüentemente, o gráfico da expressão é a reta mostrada na figura ao lado.



(b) A expressão $E(x) = 2x + 3$ se anula em $x = -3/2$. Logo, seu gráfico corta o eixo das abcissas no ponto $(-3/2\,,0)$. Além disso, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = 3$.
Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(\,0\,,3\,)$. Conseqüentemente, o gráfico da expressão é a reta mostrada na figura ao lado.



(c) A expressão $E(x) = 3x - 1$ se anula em $x = 1/3$. Assim, seu gráfico corta o eixo das abcissas no ponto $(\,1/3\,,0\,)$. Além disso, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = -1$.
Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(\,0\,,1\,)$. O gráfico dessa expressão é a reta mostrada na figura ao lado.



(d) Vimos que a expressão $E(x) = 2|x| - 5$ se anula em $x = \pm 5/2$. Assim, seu gráfico corta o eixo das abcissas nos pontos $(-5/2\,,0\,)$ e $(\,5/2\,,0\,)$. Além disso, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = -5$.

Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(\,0\,,5\,)$.

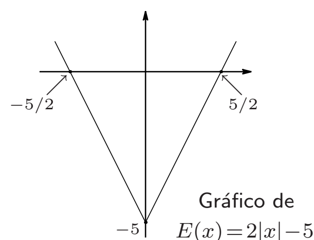
Para esboçar o gráfico dessa expressão precisamos analizá-la em intervalos onde sua expressão tem a forma de uma expressão linear. Para isso, consideremos os dois casos:

Caso 1: $x \geq 0$.
Nessa condição a expressão $E(x) = 2|x| - 5$ toma a forma

$$E(x) = 2|x| - 5 = 2x - 5\,.$$

Caso 2: $x \leq 0$.
Nessa condição a expressão $E(x) = 2|x| - 5$ toma a forma

$$E(x) = 2|x| - 5 = -2x - 5\,.$$



Dessa forma sabemos exibir o gráfico da expressão em estudo: é o gráfico da expressão $-2x-5$ quando $x \leq 0$ seguido do gráfico da expressão $2x - 5$ quando $x \geq 0$. Esse gráfico é mostrado na figura acima.

(e) Vimos que a expressão $E(x) = 3 - 5|x|$ se anula em $x = \pm 3/5$. Assim, seu gráfico corta o eixo das abcissas nos pontos $(-3/5\,,0\,)$ e $(\,3/5\,,0\,)$. Além disso, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = 3$.

Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(\,0\,,3\,)$.

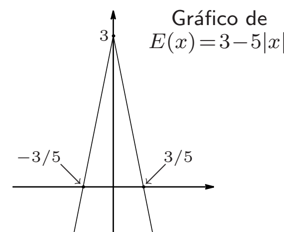
Para esboçar o gráfico dessa expressão precisamos analizá-la em intervalos onde sua expressão tem a forma de uma expressão linear. Para isso, consideremos os dois casos:

Caso 1: $x \geq 0$.
Nessa condição a expressão $E(x) = 3 - 5|x|$ toma a forma

$$E(x) = 3 - 5|x| = 3 - 5x\,.$$

Caso 2: $x \leq 0$.
Nessa condição a expressão $E(x) = 3 - 5|x|$ toma a forma

$$E(x) = 3 - 5|x| = 3 + 5x\,.$$



Novamente, sabemos exibir o gráfico da expressão em estudo: é o gráfico da expressão $3 + 5x$ quando $x \leq 0$ seguido do gráfico da expressão $3 - 5x$ quando $x \geq 0$. Esse gráfico é mostrado na figura acima.

10. Considere as expressões:

(a) $\mathbf{2 - x - x^2}$ **(b)** $\mathbf{3x^2 - 2x - 2}$ **(c)** $\mathbf{2x - 1 - x^2}$ **(d)** $\mathbf{2 + 3x - x^2}$**.**

Determine:

(1) O coeficiente do termo de segundo grau;
(2) O coeficiente do termo de primeiro grau;
(3) O termo independente;
(4) O discriminante;
(5) O número de raízes (reais), caso existam.

Solução Passemos à análise de cada uma das expressões.

(a) $-x^2 - x + 2$ é uma expressão do segundo grau. Além disso, temos:
(1) o coeficiente do termo de segundo grau é -1.
(2) o coeficiente do termo de primeiro grau é -1.
(3) o termo independente vale 2.
(4) o discriminante $\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$.
(5) a expressão tem duas raízes distintas.

(b) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2$ é uma expressão do segundo grau. Podemos afirmar que:
(1) o coeficiente do termo de segundo grau é 1.
(2) o coeficiente do termo de primeiro grau vale $-2\sqrt{2}$.
(3) o termo independente vale 2.
(4) o discriminante $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 0$.
(5) a expressão tem um único zero.

(c) $x^2 - x + 1$ é uma expressão do segundo grau.
(1) o coeficiente do termo de segundo grau é 1.
(2) o coeficiente do termo de primeiro grau é -1.
(3) o termo independente é 1.
(4) o discriminante $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$.
(5) a expressão não tem raízes (reais).

(d) $2x^2 + x + 3 = 0$ é uma equação do segundo grau.
(1) o coeficiente do termo de segundo grau é 2.
(2) o coeficiente do termo de primeiro grau é 1.
(3) o termo independente vale 3.
(4) o discriminante $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times 3 = -23 < 0$.
(5) a expressão não tem raízes (reais).

11. **Resolva a equação $2 - 3x = 2x^2$.**

Solução Temos que resolver a equação $2 - 3x - 2x^2 = 0$.
As soluções são:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-2) \times 2}}{2 \times (-2)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-4} = -\frac{3 \pm 5}{4} \quad \therefore \quad \mathcal{S} = \{-2, 1/2\}.$$

12. **Sobre a notação $\pm a$:**

Quando escrevemos $\pm a$ estamos nos referindo a dois números reais: $+a$ e $-a$. Mais precisamente, estamos nos referindo ao conjunto $\{a, -a\}$. Assim, temos que:

(1) $\pm a = \mp a$ (2) $\pm|a| = \pm a$ (3) $a \pm |b| = a \pm b$ (4) $-(a \pm b) = -a \mp b = -a \pm b$.

Pergunta-se: $|\pm a| = |a|$? ; $(\pm a)(\pm b) = \pm(ab)$?

Solução Para o primeiro item temos que $|+a| = |a|$ e $|-a| = |a|$. Logo, $|\pm a| = |a|$. No segundo item, o membro esquerdo da igualdade se refere aos números: $(+a)(+b)$, $(+a)(-b)$, $(-a)(+b)$ e $(-a)(-b)$. Logo, $(\pm a)(\pm b) = \pm(ab)$.

13. **Fatore as expressões:**

(a) $2x^2 - 3x - 2$ (b) $9x^2 + 12x + 4$ (c) $x^2 + (2 - a)x - 2a$ onde $a \in \mathbb{R}$.

Solução Analizemos o discriminante desses trinômios.

(a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$. Assim, as raízes são

$$\lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm 5}{4} \iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -1/2$$

e temos a decomposição $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)(x + \frac{1}{2}) = (x - 2)(2x + 1)$.

(b) $\Delta = (12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$. Logo, a raíz será $\lambda = -\frac{12}{2 \times 9} = -2/3$. Nesse caso temos a seguinte decomposição:

$$9x^2 + 12x + 4 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = (3x + 2)^2.$$

(c) $\Delta = (2 - a)^2 - 4 \times (-2a) = (2 - a)^2 + 8a = a^2 - 4a + 4 + 8a = (a + 2)^2$. As raízes da equação são:

$$\lambda = \frac{-(2 - a) \pm \sqrt{(a + 2)^2}}{2} = \frac{(a - 2) \pm |a + 2|}{2} = \frac{(a - 2) \pm (a + 2)}{2}, \text{ isto é,}$$

$$\lambda = \frac{(a-2)+(a+2)}{2} = a \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{(a-2)-(a+2)}{2} = -2\,.$$

Assim, a fatoração toma a forma $x^2 + (2-a)x - 2a = (x-a)(x+2)$.

14. Fatore as expressões a seguir usando a identidade $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$.
(a) $x^2 - 5x + 6$ (b) $x^2 + 4x + 3$ (c) $x^2 + x - 6$

Solução Temos que:

(a) As raízes são: 2 e 3. Logo, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

(b) As raízes são: -1 e -3. Logo, $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$.

(c) As raízes são: -3 e 2. Logo, $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$.

15. Considere as expressões do segundo grau dadas por:
(1) $x^2 - x - 2$ (2) $-x^2 - x + 2$ (3) $x^2 - 3x + 9/4$ (4) $-x^2 - x - 1$.
Para cada uma delas :
(a) Determine o ponto onde o gráfico da expressão corta o eixo das ordenadas ;
(b) Complete quadrado para colocá-la na forma $(ax + b)^2 + c$;
(c) Determine o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo ;
(d) Determine o menor ou maior valor, conforme o caso, que essa expressão assume e exiba o ponto do domínio onde isso ocorre ;
(e) Determine os pontos onde a expressão se anula ;
(f) Esboce o gráfico dessa expressão, indicando os pontos onde a expressão se anula, seu eixo de simetria e o menor ou maior valor assumido pela expressão.

Solução Passemos à análise de cada uma das expressões.

(1.a) Consideremos a expressão $E(x) = x^2 - x - 2$. Temos que $E(0) = -2$. Logo, seu gráfico intersectará o eixo das ordenadas no ponto $(0\,, -2)$.

(1.b) Completando quadrado, obtemos:

$$E(x) = x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \tag{9.12}$$

(1.c) Feito isso, concluímos de (9.12) que o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo é a reta vertical de equação: $x - 1/2 = 0 \iff x = 1/2$.

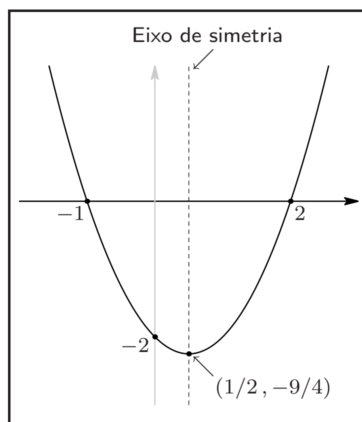
(1.d) Ainda de (9.12) resulta que:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 = 0 \quad &\iff \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \quad \iff \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ &\iff \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \iff \quad x = \frac{1 \pm 3}{2} \\ &\iff \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2\,. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão em estudo se anula apenas nos pontos: -1 e 2.

(1.e) Voltando a (9.12) concluímos que o menor valor que a expressão pode assumir é $-9/4$ e isso ocorre no ponto $1/2$ já que a parcela $(x-1/2)^2 \geq 0$ e só se anula em $1/2$.

(1.f) De posse desses resultados podemos esboçar o gráfico da parábola correspondente, o qual é mostrada na figura ao lado.



(2.a) Consideremos a expressão $E(x) = -x^2 - x + 2$. Temos que $E(0) = 2$. Logo, seu gráfico intersectará o eixo das ordenadas no ponto $(0, 2)$.

(2.b) Completando quadrado, obtemos:

$$E(x) = -x^2 - x + 2 = -(x^2 + x - 2) = -\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} - 2\Big] = -\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{9}{4} \qquad (9.13)$$

(2.c) Feito isso, concluímos de (9.13) que o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo é a reta vertical de equação: $x + 1/2 = 0 \iff x = -1/2$.

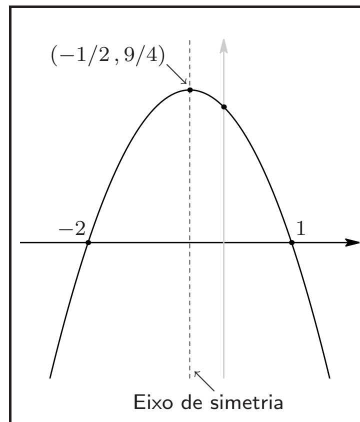
(2.d) Ainda de (9.13) resulta que:

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 2 = 0 \quad &\iff \quad -\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{9}{4} = 0 \quad \iff \quad \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{9}{4} \\ &\iff \quad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \iff \quad x = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ &\iff \quad x = -2 \ \text{ ou } \ x = 1\,. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão em estudo se anula apenas nos pontos: -2 e 1.

(2.e) Voltando a (9.13) concluímos que o maior valor que a expressão pode assumir é $9/4$ e isso ocorre no ponto $-1/2$ já que a parcela $-(x+1/2)^2 \leq 0$ e só se anula em $-1/2$.

(2.f) De posse desses resultados podemos esboçar o gráfico da parábola correspondente, o qual é mostrada na figura ao lado.



(3.a) Consideremos a expressão $E(x) = x^2 - 3x + 9/4$. Temos que $E(0) = 9/4$. Logo, seu gráfico intersectará o eixo das ordenadas no ponto $(\,0\,,9/4\,)$.

(3.b) Completando quadrado, obtemos:

$$E(x) = x^2 - 3x + 9/4 = \Big(x - \frac{3}{2}\Big)^2 - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \Big(x - \frac{3}{2}\Big)^2. \qquad (9.14)$$

(3.c) Feito isso, concluímos de (9.14) que o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo é a reta vertical de equação: $x - 3/2 = 0 \iff x = 3/2$.

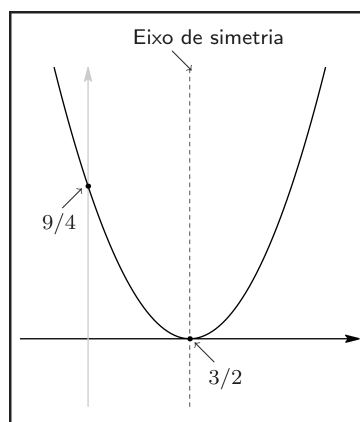
(3.d) Ainda de (9.14) resulta que:

$$x^2 - 3x + 9/4 = 0 \iff \Big(x - \frac{3}{2}\Big)^2 = 0 \iff x = 3/2\,.$$

Portanto, a expressão em estudo se anula apenas no ponto: $3/2$.

(3.e) Voltando a (9.14) concluímos que o menor valor que a expressão pode assumir é *zero* e isso ocorre no ponto $3/2$ já que $(x - 3/2)^2 \geq 0$ e só se anula em $3/2$.

(3.f) De posse desses resultados podemos esboçar o gráfico da parábola correspondente, o qual é mostrada na figura ao lado.



(4.a) Consideremos a expressão $E(x) = -x^2 - x - 1$. Temos que $E(0) = -1$. Logo, seu gráfico intersectará o eixo das ordenadas no ponto $(0, -1)$.

(4.b) Completando quadrado, obtemos:

$$E(x) = -x^2 - x - 1 = -(x^2 + x + 1) = -\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} + 1\Big] = -\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{3}{4} \tag{9.15}$$

(4.c) Feito isso, concluímos de (9.15) que o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo é a reta vertical de equação: $x + 1/2 = 0 \iff x = -1/2$.

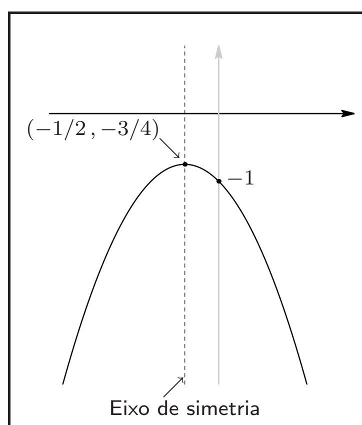
(4.d) Ainda de (9.15) resulta que:

$$-x^2 - x - 1 = 0 \iff -\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{3}{4} = 0 \iff \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 = -\frac{3}{4}$$

o que nos garante que a expressão em estudo não se anula.

(4.e) Voltando a (9.15) concluímos que o maior valor que a expressão pode assumir é $-3/4$ e isso ocorre no ponto $-1/2$ já que a parcela $-(x + 1/2)^2 \leq 0$ e só se anula em $-1/2$.

(2.f) De posse desses resultados podemos esboçar o gráfico da parábola correspondente, o qual é mostrada na figura ao lado.



16. Faça o gráfico da expressão $x|x| - |x| + x - 1$.

Solução Para analizar essa expressão vamos considerar dois casos.

Caso 1: $x \geq 0$.

Nesse caso a expressão toma a forma

$$x|x| - |x| + x - 1 = x^2 - 1 . \tag{9.16}$$

Assim, para $x \geq 0$ o gráfico da expressão inicial é o gráfico de $x^2 - 1$ o qual sabemos desenhar.

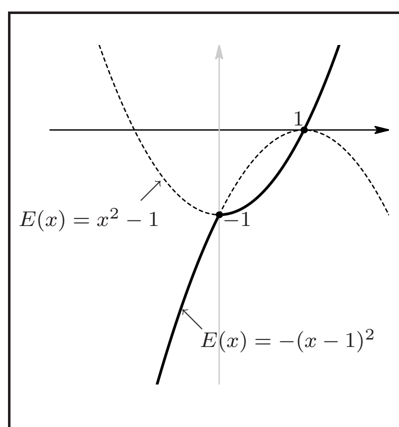
Caso 2: $x \leq 0$.

Nesse caso a expressão toma a forma

$$x|x| - |x| + x - 1 = -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2 . \qquad (9.17)$$

Assim, para $x \leq 0$ o gráfico da expressão inicial é o gráfico de $-(x-1)^2$ o qual sabemos esboçar.

Juntando esses dois gráficos obtemos o gráfico da expressão desejada. Note que a parte pontilhada não faz parte do gráfico da expressão inicial. A parte pontilhada serve apenas para ajudar a vizualizar as parábolas envolvidas no gráfico da expressão inicial.



17. **Um trinômio do segundo grau possui termo independente nulo. Determine a forma desse trinômio sabendo que ele também possui -1 como raíz.**

Solução Um trinômio do segundo grau é uma expressão da forma $ax^2 + bx + c$ onde $a \neq 0$. Como o termo independe se anula, sua forma se reduz a: $ax^2 + bx = x(ax + b)$. Como $x = -1$ é raíz, segue que:

$$(-1)\big(a \times (-1) + b\big) = 0 \iff b - a = 0 \iff a = b .$$

Assim, o trinômio em questão, tem a forma $ax(x+1)$ onde $a \neq 0$.

18. **Construa uma expressão do segundo grau cujas raízes são 1 e π.**

Solução A expressão $(x-1)(x-\pi)$ é uma expressão do segundo grau pois é da forma $x^2-(1+\pi)x+\pi$ e possui $x = 1$ e $x = \pi$ como raízes.

19. **Considere uma expressão da forma $ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Suponha que essa expressão nunca se anula. Pergunta-se: a expressão será positiva quando $c > 0$ e será negativa quando $c < 0$?**

Solução Como a expressão nunca se anula, então $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Dessa desigualdade, podemos concluir que: $a > 0$ (resp. $a < 0$) se, e somente se, $c > 0$ (resp. $c < 0$). Caso contrário, isto é, se a e c não têm os mesmos sinais então $-4ac \geq 0$ e conseqüentemente, $b^2 - 4ac \geq 0$.

Assim, quando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, podemos concluir que:

- $ax^2 + bx + c$ é sempre positivo $\iff$ $a > 0$ $\iff$ $c > 0\,;$
- $ax^2 + bx + c$ é sempre negatico $\iff$ $a < 0$ $\iff$ $c < 0\,;$

respondendo positivamente a questão colocada.

20. Descreva todos os trinômios do segundo grau que tem a seguinte propriedade: uma das raízes é o inverso da outra.

Solução Seja λ um número real não nulo. Precisamos descrever os trinômios $p(x)$ do segundo grau que possuem λ e $1/\lambda$ como raízes. Resulta então que

$$p(x) = a(x-\lambda)(x-1/\lambda) \quad \text{onde} \quad a\,,\lambda \neq 0\,.$$

A expressão acima descreve todos os trinômios do segundo grau que possuem a propriedade requerida.

21. Resolva as equações:

(a) $x^3 = a$ **(b)** $x^2 = a$**.**

Solução No primeiro item vamos mostrar que a equação $x^3 = a$ possui, de fato, uma única solução, a saber, a solução $x = \sqrt[3]{a}$.

(a) Temos que:

$$x^3 = a \iff x^3 - a = 0 \iff x^3 - (\sqrt[3]{a})^3 = 0 \iff (x - \sqrt[3]{a})(x^2 + \sqrt[3]{a}\,x + \sqrt[3]{a^2}\,) = 0$$
$$\iff x - \sqrt[3]{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + \sqrt[3]{a}\,x + \sqrt[3]{a^2} = 0\,.$$

Logo, $x = \sqrt[3]{a}$ ou $x^2 + \sqrt[3]{a}\,x + \sqrt[3]{a^2} = 0\,.$

No entanto, para a equação $x^2 + \sqrt[3]{a}\,x + \sqrt[3]{a^2} = 0$ temos que $\Delta = \sqrt[3]{a^2} - 4\sqrt[3]{a^2} = -3\sqrt[3]{a^2} < 0$ quando $a \neq 0$. Logo, tal equação não tem solução quando $a \neq 0$. Quando $a = 0$ ela se reduz a equação $x^2 = 0$ que tem $x = 0$ como única solução.

Portanto, acabamos de mostrar que a única solução da equação $x^3 = a$ é $x = \sqrt[3]{a}$.

(b) Nessa equação temos que analizar dois casos:

- $\boldsymbol{a < 0}$ **:**
  Nesse caso a equação não tem solução pois x^2 não pode ser negativo.
- $\boldsymbol{a \geq 0}$ **:**
  Nesse caso estamos diante de um produto notável, e temos:
  $x^2 - a = 0 \iff (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \iff x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}\,.$
  Assim, o conjunto solução é $\mathcal{S} = \{\pm\sqrt{a}\,\}$ que se reduz a um conjunto unitário quando, e somente quando $a = 0$.

22. Resolva a equação $\boldsymbol{x^2 - 3|x| + 1 = 0}$.

Solução A equação acima não é uma equação do segundo grau pois não é da forma (9.3).

No entanto, como $x^2 = |x|^2$, ela pode ser escrita da seguinte maneira:

$$|x|^2 - 3|x| + 1 = 0\,. \tag{9.18}$$

Fazendo a mudança de variável $y = |x|$, a equação (9.18) toma a forma de uma equação do segundo grau, a saber:

$$y^2 - 3y + 1 = 0\,. \tag{9.19}$$

Suas soluções são:

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Para voltar a equação inicial devemos fazer:

Passo 1: $y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Assim,

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = |x| \iff x = \pm\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Passo 2: $y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Assim,

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = |x| \iff x = \pm\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Portanto, o conjunto solução da equação proposta é:

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

☛ **Nota:** Observe que $3 - \sqrt{5} > 0$. Conseqüentemente, a equação $|x| = (3-\sqrt{5})/2$ tem soluções.

23. **Fatore as expressões**

(a) $\boldsymbol{x^2 - 3|x| + 2}$ **(b)** $\boldsymbol{|x|^3 + x^2 - 6|x|}$.

Solução Primeiramente observemos que:

$$x^2 - 3|x| + 2 = |x|^2 - 3|x| + 2 \quad \text{e} \quad |x|^3 + x^2 - 6|x| = |x|^3 + |x|^2 - 6|x|\,.$$

Assim, fazendo $y = |x|$, obtemos:

(a) $x^2 - 3|x| + 2 = y^2 - 3y + 2 = (y-2)(y-1) = (|x|-2)(|x|-1)$.

Consequentemente, $x^2 - 3|x| + 2 = (|x|-2)(|x|-1)$.

(b) $|x|^3 + x^2 - 6|x| = y^3 + y^2 - 6y = y(y^2 + y - 6) = y(y+3)(y-2) = |x|(|x|+3)(|x|-2)$.

Logo, $|x|^3 + x^2 - 6|x| = |x|(|x|+3)(|x|-2)$.

24. Determine as soluções da equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Solução Fazendo a mudança de variável $y = x^2$ transformamos a equação inicial na seguinte equação do segundo grau:

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

cujas soluções são: $y = 3$; $y = 2$. Voltando à variável inicial, teremos:

Passo 1: $y = 3$.

$3 = x^2 \iff x = \pm\sqrt{3}$.

Passo 2: $y = 2$.

$2 = x^2 \iff x = \pm\sqrt{2}$.

Finalizando, concluímos que $\mathcal{S} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

25. Determine qual deve ser o valor de λ para que a dízima periódica 1,2888 . . . seja raíz do trinômio $45x^2 + (45 - \lambda)x - \lambda$.

Solução Primeiramente, vamos determinar a fração geratriz da dízima periódica $1{,}2888\ldots$

Para isso, seja: $z = 1{,}2888\ldots$

Assim, $10\,z = 12{,}888\ldots$ e $100\,z = 128{,}888\ldots$ donde obtemos:

$$\begin{aligned} 100\,z - 10\,z &= 128{,}888\ldots - 12{,}888\ldots = 128 + 0{,}888\ldots - (12 + 0{,}888\ldots) \\ &= 128 + 0{,}888\ldots - 12 - 0{,}888\ldots = 128 - 12 = 116 = 2^2 \times 29. \end{aligned}$$

Resulta daí que:

$$90\,z = 2^2 \times 29 \iff z = \frac{2^2 \times 29}{90} = \frac{2^2 \times 29}{3^2 \times 2 \times 5} = \frac{58}{45}.$$

Portanto, a fração irredutível que é geratriz da dízima em questão é a fração $58/45$. Assim sendo, para que $1{,}2888\ldots$ seja raíz de $45x^2 + (45 - \lambda)x - \lambda$ devemos ter:

$$\begin{aligned} 45\Big(\frac{58}{45}\Big)^2 + (45 - \lambda)\frac{58}{45} - \lambda = 0 &\iff 45\Big(\frac{58}{45}\Big)^2 + 45\frac{58}{45} = \lambda\frac{58}{45} + \lambda \\ &\iff 45 \times \frac{58}{45} \times \Big(\frac{58}{45} + 1\Big) = \Big(\frac{58}{45} + 1\Big)\lambda \\ &\iff \lambda = 58 \end{aligned}$$

mostrando assim que o valor procurado é $\lambda = 58$.

26. Determine para quais valores de x a expressão $2x - \sqrt{x}$ assume o valor 2.

Solução Para isso devemos resolver a equação

$$2x - \sqrt{x} = 2. \tag{9.20}$$

Façamos a mudança de variável $y = \sqrt{x}$. Nesse caso, a equação acima toma a forma

$$2y^2 - y - 2 = 0$$

cujas soluções são:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 2 \times 2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}\,.$$

Agora, façamos:

Passo 1: $y = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$.

$\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} = \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^2$.

Passo 2: $y = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$.

$\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} = \sqrt{x}\,.$ No entanto, $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} < 0\,.$ Isso significa que a equação (9.20) não tem soluções associadas ao valor $y = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$.

Finalizando, concluímos que o conjunto solução da equação proposta é $\mathcal{S} = \left\{ \left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^2 \right\}$.

27. Determine o domínio de definição da expressão $\dfrac{2-x}{x^4 - x^3 - 2x^2}$ e os pontos onde ela se anula.

Solução Para conhecer o domínio da expressão precisamos determinar quando $x^4 - x^3 - 2x^2$ se anula. Temos que:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 - x - 2) = x^2(x-2)(x+1)\,.$$

Consequentemente, o denominador da expressão se anula apenas em $\{0\,,-1\,,2\}$. Além disso, o numerador da expressão está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, o domínio de definição da expressão proposta é o conjunto $\mathbb{R} - \{2\,,0\,,-1\}$.

O numerador da expressão dada só se anula em $x = 2$ mas nesse ponto a expressão não está definida. Concluímos então que a expressão em questão nunca se anula em seu domínio de definição.

28. Calcule as dimensões do retângulo cuja área vale $3\,m^2$ sabendo que um dos lados excede o outro de $1\,m$.

Solução Seja x o lado menor do retângulo, dado em metros. Assim, o lado maior vale $x+1$. Afirmar que a área do retângulo vale 3 é o mesmo que afirmar

$x\,(x+1) = 3$ | x | $x+1$

$$x\,(x+1) = 3\,.$$

Resolvendo essa equação obtemos:

$$x(x+1) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

obtendo as soluções: $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2} > 0$ e $-\dfrac{\sqrt{13}+1}{2} < 0$.

Consequentemente, as dimensões do retângulo são:

o lado menor mede $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\, m$ e o lado maior mede $1+\dfrac{\sqrt{13}-1}{2} = \dfrac{2}{2}+\dfrac{\sqrt{13}-1}{2} = \dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\, m$.

29. **Por ocasião de uma maratona, uma quantia em prêmios no valor de 9.600,00 reais deve ser igualmente repartida entre aqueles que terminassem a maratona num tempo inferior a 3 horas. Dois dos participantes que terminaram a corrida em menos de 3 horas decidiram não comparecer para receber o prêmio o que fez com que o prêmio de cada um dos restantes aumentasse em 400 reais. Quantos participantes terminaram a corrida no tempo previsto e quanto recebeu cada um deles ?**

Solução Denotemos por x o número de participantes que terminaram a corrida no tempo previsto. Cada um deles deveria receber $\frac{9.600}{x}$. No entanto, a desistência de 2 ganhadores fez com que o prêmio de cada um deles passasse a ser $\frac{9.600}{x-2}$. A relação entre a quantia que cada um deveria receber e a quantia que cada um acabou recebendo é:

$$\frac{9.600}{x}+400=\frac{9.600}{x-2} \iff \frac{24}{x}+1=\frac{24}{x-2}.$$

Repare que x é um inteiro maior do que 2. Nessas condições, simplificando a equação acima, obtemos:

$$24(x-2)+x(x-2)=24x \iff x^2-2x-48=0$$

cujas soluções são: -6 e 8. Descartada a solução negativa, concluímos que o número de participantes que conseguiram terminar a corrida no tempo previsto foi: 8. Deles, apenas 6 receberam o prêmio, cabendo a cada um o montante de

$$\frac{9.600}{6}=1.600\ reais.$$

30. **Quais são as dimensões de um terreno retangular de $189\, m^2$ de área, cujo perímetro mede $60\, m$.**

Solução Sejam x e y as dimensões dos lados do terreno retangular. Assim, temos:

$xy = 189$
$2x+2y=60$
y
x

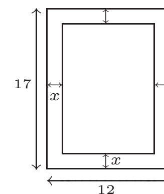
Perímetro: $2x+2y=60$ e **Área:** $xy=189$.

Consequentemente, $y=30-x$ e $x(30-x)=189$. Agora, temos:

$$x(30-x)=189 \iff x^2-30x+189=0 \iff x=\frac{30\pm\sqrt{900-756}}{2} \iff x=\frac{30\pm 12}{2}.$$

Assim, as dimensões do terreno são: $x=21\,m$ e $y=30-x=9\,m$. Outra forma de descrever as dimensões é: $x=9\,m$ e $y=30-x=21\,m$.

31. **Um quadro com moldura possue $12\,cm$ de base e $17\,cm$ de altura. Sabendo que a moldura ocupa $64{,}5\,cm^2$ da área total do quadro e que tem largura uniforme, calcule as dimensões da moldura.**



Solução Seja x a largura da moldura. Assim, temos:

$$2(17x)+(12-2x)x = 64{,}5 \iff x^2-23x+\frac{64{,}5}{2}=0 \iff x=\frac{23\pm\sqrt{529-129}}{2}=\frac{23\pm 20}{2}\,.$$

Assim, a largura da moldura vale $1{,}5\,cm$ já que o valor $43/2$ é superior às dimensões do quadro. Concluímos então que as dimensões da moldura são: $12\,cm$ de base, $17\,cm$ de altura e $1{,}5\,cm$ de largura.

32. **Para quais valores de λ a equação $2x^2-3x+\lambda=0$ tem duas soluções distintas ?**

Solução Temos que $\Delta = 9-4\times 2\times\lambda = 9-8\lambda$. Conseqüentemente, a equação tem duas soluções se, e somente se:

$$\Delta = 9-8\lambda>0 \iff 8\lambda<9 \iff \lambda<9/8\,.$$

33. **Determine para quais valores do parâmetro λ a equação $\dfrac{\lambda}{x-2}+x=\lambda$ tem exatamente duas soluções distintas.**

Solução Para $x\neq 2$ temos que:

$$\frac{\lambda}{x-2}+x=\lambda \iff \frac{\lambda}{x-2}+\frac{x(x-2)}{x-2}=\lambda \iff \frac{\lambda+x(x-2)}{x-2}=\lambda$$

$$\iff \lambda+x^2-2x=\lambda x-2\lambda \iff x^2-(2+\lambda)x+3\lambda=0. \qquad (9.21)$$

Assim para que a equação inicial tenha duas soluções distintas, o discriminante $\Delta=(2+\lambda)^2-4\times 1\times(3\lambda)$ deve ser positivo, desde que tais valores de λ não introduzam $x=2$ como raiz de (9.21).

Portanto, devemos ter:

$$(2+\lambda)^2-4\times 1\times(3\lambda)>0 \iff \lambda^2+4\lambda+4-12\lambda>0 \iff \lambda^2-8\lambda+4>0.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\lambda^2-8\lambda+4=0 \iff x=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\times 1\times 4}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{8\pm 4\sqrt{3}}{2}=4\pm 2\sqrt{3}\,.$$

Logo,

$$\lambda^2-8\lambda+4>0 \iff \lambda\in\big(-\infty\,,4-2\sqrt{3}\,\big)\cup\big(4+2\sqrt{3}\,,\infty\big).$$

Para finalizar a solução, resta saber se para algum valor de $\lambda\in\big(-\infty\,,4-2\sqrt{3}\,\big)\cup\big(4+2\sqrt{3}\,,\infty\big)$ pode ocorrer $x=2$ como raíz de (9.21). Para que isso ocorra, devemos ter

$$2^2-(2+\lambda)2+3\lambda=0 \iff 4-4-2\lambda+3\lambda=0 \iff \lambda=0\,.$$

Isso significa que $x = 2$ é solução de (9.21) quando $\lambda = 0$. Bem sabemos que $x = 2$ não pode ser solução da equação inicial. Logo, precisamos retirar o valor $\lambda = 0$ de $\big(-\infty\,,4-2\sqrt{3}\,\big)\cup\big(\,4+2\sqrt{3}\,,\infty\big)$ pois para esse valor do parâmetro λ teremos uma única solução para a equação inicial.

Concluímos assim que a equação dada tem duas soluções distintas se, e somente se

$$\lambda \in \big(-\infty\,,0\,\big)\cup(\,0\,,4-2\sqrt{3}\,\big)\cup\big(\,4+2\sqrt{3}\,,\infty\big).$$

☛ Note que $0 < 4-2\sqrt{3}$ já que: $0 < 4-2\sqrt{3} \iff 2\sqrt{3} < 4 \iff 12 < 16.$

34. Resolva a equação $|2x-3| = 4$.

Solução Fazendo a mudança de variável $y = 2x-3$ obtemos a equação $|y| = 4$. Assim,

$$|y| = 4 \iff y = \pm 4\,.$$

Para voltar à variável inicial façamos:

Passo 1: $y = 4$.

Nese caso:

$4 = 2x-3 \iff 2x = 4+3 \iff 2x = 7 \iff x = 7/2\,.$

Passo 2: $y = -4$.

Nese caso:

$-4 = 2x-3 \iff 2x = -4+3 \iff 2x = -1 \iff x = -1/2\,.$

Consequentemente, $\mathcal{S} = \big\{-1/2\,,\,7/2\big\}$.

35. Resolva a equação $2|x-2|-5 = 0$.

Solução Fazendo a mudança de variável $y = x-2$ obtemos a equação $2|y|-5 = 0$. Assim,

$$2|y|-5 = 0 \iff |y| = 5/2 \iff y = \pm 5/2\,.$$

Para determinar as soluções da equação inicial, façamos:

Passo 1: $y = 5/2$.

Nese caso:

$\frac{5}{2} = x-2 \iff x = \frac{5}{2}+2 \iff x = 9/2\,.$

Passo 2: $y = -5/2$.

Nese caso:

$-\frac{5}{2} = x-2 \iff x = 2-\frac{5}{2} \iff x = -1/2\,.$

Consequentemente, $\mathcal{S} = \big\{-1/2\,,\,9/2\big\}$.

36. Resolva a equação $\sqrt{x^2 - 2x} = 1$.

Solução Fazendo a mudança de variável $y = x^2 - 2x$ obtemos a equação $\sqrt{y} = 1$. Assim,

$$\sqrt{y} = 1 \iff y = 1 .$$

Para voltar à variável inicial façamos:

Passo 1: $y = 1$.
Nese caso:

$$1 = x^2 - 2x \iff x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$
$$\iff x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \iff x = 1 \pm \sqrt{2} .$$

Assim, $\mathcal{S} = \{1 - \sqrt{2} \,,\, 1 + \sqrt{2}\}$.

37. Resolva a equação $(|x| - 3)^4 = 2$.

Solução Façamos a mudança de variável $y = |x| - 3$. A equação inicial toma a forma $y^4 = 2$. Resolvendo-a:

$$y^4 = 2 \iff y = \pm\sqrt[4]{2} .$$

Para voltar a variável inicial devemos fazer:

Passo 1: $y = \sqrt[4]{2}$.
Assim: $\sqrt[4]{2} = |x| - 3 \iff |x| = 3 + \sqrt[4]{2} \iff x = \pm\big(3 + \sqrt[4]{2}\big)$.

Passo 2: $y = -\sqrt[4]{2}$.
Assim[6]: $-\sqrt[4]{2} = |x| - 3 \iff |x| = 3 - \sqrt[4]{2} \iff x = \pm\big(3 - \sqrt[4]{2}\big)$.

Consequentemente, $\mathcal{S} = \Big\{-3 - \sqrt[4]{2} \,,\, 3 + \sqrt[4]{2} \,,\, -3 + \sqrt[4]{2} \,,\, 3 - \sqrt[4]{2}\Big\}$.

38. Determine os valores de λ para os quais $2x^2 - \lambda x + 2\lambda \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução Completando quadrados, temos:

$$2x^2 - \lambda x + 2\lambda = 2\Big\{x^2 - \frac{\lambda}{2}x + \lambda\Big\} = 2\Big\{\Big(x - \frac{\lambda}{4}\Big)^2 - \frac{\lambda^2}{16} + \frac{16\lambda}{16}\Big\} = 2\Big(x - \frac{\lambda}{4}\Big)^2 + \frac{16\lambda - \lambda^2}{8} .$$

Portanto, $2x^2 - \lambda x + 2\lambda \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se $16\lambda - \lambda^2 \geq 0$ ou seja, quando e somente quando $\lambda^2 - 16\lambda \leq 0$. Para finalizar a questão, precisamos estudar o sinal de $\lambda^2 - 16\lambda$.

Como $\lambda^2 - 16\lambda = \lambda(\lambda - 16)$ obtemos a seguinte tabela de sinais ao lado. Assim, $\lambda^2 - 16\lambda \leq 0$ se, e somente se $\lambda \in [0, 16]$.

+ + + +	**0**	− − − − − −	**0**	+ + + +	*sinal de*
	0		**16**		$\lambda^2 - 16\lambda$

Assim, $2x^2 - \lambda x + 2\lambda \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ quando, e somente quando $\lambda \in [0, 16]$.

[6]Note que $3 - \sqrt[3]{2} > 0$ e por isso a equação $|x| = 3 - \sqrt[4]{2}$ tem solução.

39. Para quais valores de λ a equação $2x^2 - \lambda x + 2\lambda = 0$ admite duas raízes distintas ?

Solução Para que a equação admita duas raízes distintas devemos ter $\Delta = \lambda^2 - 4 \times 2 \times 2\lambda > 0$ ou seja, $\lambda^2 - 16\lambda > 0$. Usando o estudo de sinais do exercício anterior, podemos responder que tal fato ocorre se, e somente se $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (16, \infty)$.

40. Resolva a equação $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x-1} = 1$.

Solução Para $x \neq 1$ temos que:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} = 1 \iff \frac{x(x-1)+2}{2(x-1)} = 1 \iff x^2 - x + 2 = 2x - 2$$

$$\iff x^2 - 3x + 4 = 0.$$

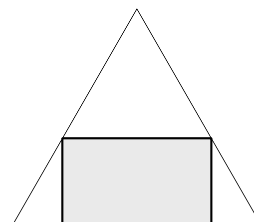
Por outro lado, o discriminante de $x^2 - 3x + 4$ vale $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 < 0$. Logo, a equação $x^2 - 3x + 4 = 0$ não tem soluções (reais). Consequentemente, a equação

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} = 1 \quad \text{não admite soluções reais.}$$

41. Um retângulo está inscrito num triângulo equilátero de lado $l > 0$ como exibido na figura abaixo.

(a) Mostre que a área desse retângulo é menor ou igual a $l^2\sqrt{3}/8$;

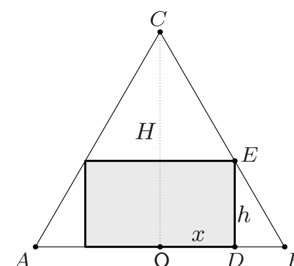
(b) Mostre que essa área assume o valor $l^2\sqrt{3}/8$ quando a base do retângulo for igual a metade do lado do triângulo.



Solução Comecemos fixando os pontos A , B , C , D e O no triângulo em questão.

Para ter uma estimativa da área do retângulo vamos, primeiramente, determinar uma expressão para tal área, usando como variável o comprimento do segmento OD. Para isso, fixemos as seguintes notações:

- x = comprimento do segmento OD ;
- h = comprimento do segmento DE ;
- H = comprimento do segmento OC.



A área A do retângulo fica então dada por:

$$A = 2x \times h \quad \text{onde } 0 < x < l/2.$$

Por outro lado, temos:

- Como o triângulo COB é retângulo, segue do *Teorema de Pitágoras* que

$$H^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \iff H^2 = \frac{4l^2}{4} - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

e, portanto,

$$H = l\sqrt{3}/2\,;$$

- Da semelhança dos triângulos COB e EDB segue que

$$\frac{H}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x} \iff \frac{H}{h} = \frac{l}{l - 2x} \iff \frac{l\sqrt{3}}{2h} = \frac{l}{l - 2x}$$

e portanto,

$$h = \frac{(l - 2x)\sqrt{3}}{2}\,.$$

Assim, a expressão da área do retângulo, fica dada por

$$A(x) = x(l - 2x)\sqrt{3} \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,, l/2)\,.$$

Completando quadrados, obtemos:

$$A(x) = x(l - 2x)\sqrt{3} = \sqrt{3}\big(xl - 2x^2\big) = -2\sqrt{3}\left[x^2 - \frac{l}{2}x\right]$$

$$= -2\sqrt{3}\left[\left(x - \frac{l}{4}\right)^2 - \frac{l^2}{16}\right] = -2\sqrt{3}\left(x - \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}\,l^2}{8}$$

ou seja,

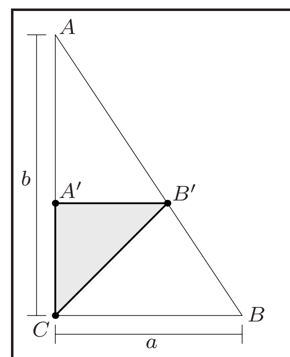
$$A(x) = -2\sqrt{3}\left(x - \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}\,l^2}{8} \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,, l/2).$$

Agora, podemos concluir que o maior valor que a área do retângulo pode assumir é $l^2\sqrt{3}/8$ e esse valor ocorre quando, e somente quando $x = l/4$, isto é, quando, e somente quando, a base do quadrado $(= 2x = 2\frac{l}{4} = l/2)$ for igual a metade do lado do triângulo. E isso responde os itens (a) e (b) da questão.

42. Considere um triângulo retângulo de catetos $a\,, b > 0$. Inscrito nesse triângulo, como mostrado na figura abaixo, temos um triângulo hachurado de vértices A', B' e C, o qual é retângulo em A'.

(i) Mostre que a área do triângulo inscrito vale, no máximo, $ab/8$;

(ii) Mostre que essa área assume o valor $ab/8$ se, e somente se, $|A'B'| = a/2$.



Solução Para ter uma estimativa da área do triângulo inscrito vamos, primeiramente, determinar uma expressão para tal área, usando como variável o comprimento do segmento $A'B'$.

Para isso, fixemos as seguintes notações:

- x = comprimento do segmento $A'B'$;
- h = comprimento do segmento CA'.

A área $\mathcal{A}$ do triângulo inscrito fica então dada por:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\, x \times h \quad \text{onde } 0 < x < a.$$

Por outro lado, da semelhança dos triângulos $AA'B'$ e ACB resulta que:

$$\frac{b-h}{b} = \frac{x}{a} \iff b-h = \frac{b\,x}{a} \iff h = b\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)$$

Assim, a expressão da área do triângulo inscrito, toma a forma

$$\mathcal{A}(x) = \frac{b}{2}\Big(x - \frac{x^2}{a}\Big) \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,,a\,)\,.$$

Completando quadrados, obtemos:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{b}{2}\Big(x - \frac{x^2}{a}\Big) = -\frac{b}{2}\Big(\frac{x^2}{a} - x\Big) = -\frac{b}{2}\Big[\Big(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{2}\Big)^2 - \frac{a}{4}\Big]$$

ou seja,

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{b}{2}\Big(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{2}\Big)^2 + \frac{ab}{8} \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,,a).$$

Agora, podemos concluir que o maior valor que a área do triângulo inscrito pode assumir é $ab/8$ e esse valor ocorre quando, e somente quando:

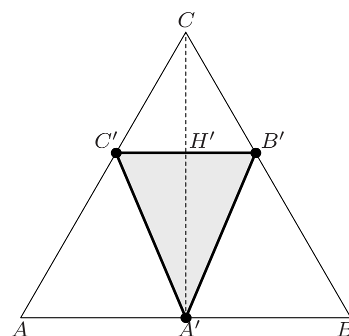
$$\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{2} = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \iff x = a/2\,.$$

E isso responde os itens (i) e (ii) da questão.

43. **Considere um triângulo eqüilátero de lado $\ell > 0$. Inscrito nesse triângulo, como mostrado na figura abaixo, temos um triângulo hachurado de vértice A', B', C' onde o segmento $A'C$ é perpendicular aos segmentos $C'B'$ e AB.**

(i) Mostre que a área do triângulo inscrito vale, no máximo, $\ell^2\sqrt{3}/16$;

(ii) Mostre que essa área assume o valor $\ell^2\sqrt{3}/16$ se, e somente se, $|A'H'| = |A'C|/2$.



Solução Para termos uma estimativa da área do triângulo inscrito vamos, primeiramente, determinar uma expressão para tal área, usando como variável o comprimento do segmento $A'H'$.

Para isso, fixemos a seguinte notação:

- $x =$ comprimento do segmento $A'H'$;
- $b =$ comprimento do segmento $C'H'$;
- $h =$ comprimento do segmento $A'C$.

Repare que o triângulo $A'B'C'$ é isósceles. Assim, o segmento $|C'B'|$ vale $2\,|C'H'|$. Além disso, temos que $|AB| = 2\,|AA'|$.

A área $\mathcal{A}$ do triângulo inscrito fica então dada por:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\,(2\,b) \times x \quad \text{onde } 0 < x < h.$$

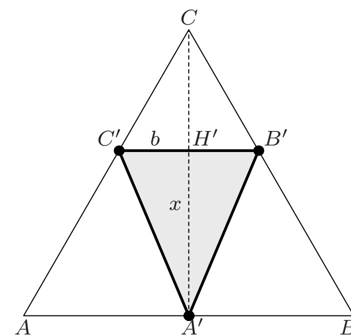
Além disso, do *Teorema de Pitágoras* segue que:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \quad \Longleftrightarrow \quad h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}\,.$$

Portanto, a altura h do triângulo ABC vale: $h = \ell\sqrt{3}/2$.

Por outro lado, da semelhança dos triângulos $AA'C$ e $C'H'C$ resulta que:

$$\frac{h-x}{h} = \frac{b}{\ell/2} \quad \Longleftrightarrow \quad b = \frac{\ell(h-x)}{2h}\,.$$



Assim, a expressão da área do triângulo inscrito, toma a forma

$$\mathcal{A}(x) = x\,\frac{\ell(h-x)}{2h} \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,,h\,)\,.$$

Completando quadrados, obtemos:

$$\mathcal{A}(x) = x\,\frac{\ell(h-x)}{2h} = -\frac{\ell}{2h}\,(x^2 - hx) = -\frac{\ell}{2h}\left[\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{4}\right]$$

ou seja,

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{\ell}{2h}\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{\ell h}{8} \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,,h).$$

Agora, podemos concluir que o maior valor que a área do triângulo inscrito pode assumir é

$$\frac{\ell h}{8} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16}$$

e esse valor ocorre quando, e somente quando:

$$x - \frac{h}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = h/2\,.$$

E isso responde os itens (i) e (ii) da questão.

5 Equação $\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} = 0$

A abordagem inicial da equação

$$\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} = 0$$

onde $\boxed{\text{Expressão A}}$ e $\boxed{\text{Expressão B}}$ são expressões numa mesma variável, é feita usando a propriedade estudada na seção **??** da Lição **??**. Essa propriedade nos garante que: dados números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ então

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\,.$$

Para iniciar o processo de solução da equação em estudo, fazemos:

$$\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} = 0 \qquad (9.22)$$

☞ 1° **Passo:**

Determinamos os valores da variável para os quais a $\boxed{\text{Expressão A}}$ e a $\boxed{\text{Expressão B}}$ estão, ambas, bem definidas.

☞ 2° **Passo:**

Resolvemos a equação $\boxed{\text{Expressão A}} = 0\,.$

☞ 3° **Passo:**

Resolvemos a equação $\boxed{\text{Expressão B}} = 0\,.$

O conjunto solução da equação (9.22) é a união das soluções obtidas nos 2 últimos passos, retirados dessa união os pontos que não foram obtidos no primeiro passo.

De forma semelhante, podemos aplicar esse processo quando temos três ou mais expressões numa mesma variável como em:

$$\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} \times \boxed{\text{Expressão C}} = 0\,.$$

Com essa técnica também podemos iniciar o estudo de equações do tipo:

$$\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} = \boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão C}}\,. \qquad (9.23)$$

Para isso, basta passar o segundo membro para o primeiro (trocando seu sinal) e colocar o termo $\boxed{\text{Expressão A}}$ em evidência. Feitas essas operações vamos nos deparar com uma equação do tipo (9.22).

Exercícios resolvidos

1. **Resolva a equação $x^2(x^2-2)^3 = 0$.**

Solução Seguindo a regra vista nessa lição, devemos fazer:

Passo 1: As expressões x^2 e $(x^2-2)^3$ estão bem definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Passo 2: Resolver a equação $x^2 = 0$.
$x^2 = 0 \iff x = 0$.

Passo 3: Resolver a equação $(x^2-2)^3 = 0$.
$(x^2-2)^3 = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$.

Consequentemente, $\mathcal{S} = \{0\,,\ \sqrt{2}\,,\ -\sqrt{2}\}$.

2. **Resolva a equação $(2x-\pi)(x^2-x-2)(1-2\sqrt{x}) = 0$.**

Solução Para isso, devemos resolver as três seguintes equações.
(a) $2x - \pi = 0 \iff x = \pi/2$.
(b) $x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1$.
(c) $1 - 2\sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x} = 1/2 \iff x = 1/4$.
Portanto, o conjunto solução da equação inicial é: $\mathcal{S} = \big\{\pi/2\,, -1\,, 2\,, 1/4\big\}$.

3. **Resolva a equação $(2x+1)(1-9x^2) + 5(1-x^2)(1-3x) = 0$.**

Solução Simplificando a equação $(2x+1)(1-9x^2)+5(1-x^2)(1-3x) = 0$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
& (2x+1)(1-9x^2) + 5(1-x^2)(1-3x) = 0 \\
\iff & (2x+1)(1-3x)(1+3x) + 5(1-x^2)(1-3x) = 0 \\
\iff & (1-3x)\big\{(2x+1)(1+3x) + 5(1-x^2)\big\} = 0 \\
\iff & (1-3x)\big\{2x + 6x^2 + 1 + 3x + 5 - 5x^2\big\} = 0 \\
\iff & (1-3x)(x^2+5x+6) = 0.
\end{aligned}
$$

Agora, podemos concluir que $(2x+1)(1-9x^2)+5(1-x^2)(1-3x)=0$ se, e somente se,

$$1-3x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\times1\times6}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}=\begin{cases}-3\\-2.\end{cases}$$

Portanto, a equação $(2x+1)(1-9x^2)+5(1-x^2)(1-3x)=0$ tem exatamente três soluções, a saber:

$$1/3 \ ; \ -2 \ \text{ e } \ -3\,.$$

4. Resolva a equação $(1-2|x|)(x^2-x)^3=0$.

Solução Colocando x em evidência obtemos

$(1-2|x|)(x^2-x)^3=0 \iff (1-2|x|)\times x^3\times(x-1)^3=0\,.$

Devemos agora dar os seguintes passos.

Passo 1: As três expressões $1-2|x|$, x^3 e $(x-1)^3$ envolvidas estão bem definidas em toda a reta.

Passo 2: Resolver a equação $1-2|x|=0$.

$1-2|x|=0 \iff 2|x|=1 \iff |x|=1/2 \iff x=\pm1/2\,.$

Passo 3: Resolver a equação $x^3=0$.

$x^3=0 \iff x=0\,.$

Passo 4: Resolver a equação $(x-1)^3=0$.

$(x-1)^3=0 \iff x-1=0 \iff x=1\,.$

Portanto, $\mathcal{S}=\{-1/2\,,\,0\,,\,1/2\,,\,1\}$.

5. Resolva a equação $(x+1)(2x-x^2)=x+1$.

Solução As expressões envolvidas estão bem definidas em toda a reta. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}(x+1)(2x-x^2)=x+1 &\iff (x+1)(2x-x^2)-(x+1)=0\\ &\iff (x+1)(2x-x^2-1)=0\\ &\iff (x+1)(x^2-2x+1)=0\end{aligned}$$

Passo 1: Resolvendo a equação $x+1=0$.

$x+1=0 \iff x=-1\,.$

Passo 2: Resolvendo a equação $x^2-2x+1=0$.

Resolvendo-a, teremos:

$x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1\,.$

Portanto, o conjunto solução da equação inicial será: $\mathcal{S}=\{1\,,-1\}$.

6. **Resolva a equação** $(|x|-1)(2-x)=1-|x|$.

Solução As expressões envolvidas estão bem definidas em toda a reta. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}(|x|-1)(2-x)=1-|x| &\iff (|x|-1)(2-x)-(1-|x|)=0\\ &\iff (|x|-1)(2-x)+(|x|-1)=0\\ &\iff (|x|-1)(2-x+1)=0\\ &\iff (|x|-1)(3-x)=0\,.\end{aligned}$$

Passo 1: Resolvendo a equação $|x|-1=0$.

$|x|-1=0 \iff |x|=1 \iff x=\pm 1$.

Passo 2: Resolvendo a equação $3-x=0$.

Resolvendo-a:

$3-x=0 \iff x=3$.

Portanto: $\mathcal{S}=\{1\,,\,-1\,,\,3\}$.

7. **Resolva a equação** $(x-1)(2x-1)(3-4x)=(x-1)(1-2x)^2$.

Solução A equação inicial pode ser colocada sob a forma

$$\begin{aligned}(x-1)(2x-1)(3-4x)=(x-1)(1-2x)^2 &\iff (x-1)(2x-1)(3-4x)=(x-1)(2x-1)^2\\ &\iff (x-1)(2x-1)(3-4x-2x+1)=0\\ &\iff (x-1)(2x-1)(4-6x)=0\,.\end{aligned}$$

Passo 1: Resolvendo a equação $x-1=0$.

$x-1=0 \iff x=1$.

Passo 2: Resolvendo a equação $2x-1=0$.

$2x-1=0 \iff x=1/2$.

Passo 3: Resolvendo a equação equação $4-6x=0$.

Temos que:

$4-6x=0 \iff 6x=4 \iff x=2/3$.

Portanto, o conjunto solução da equação inicial é: $\mathcal{S}=\{1\,,\,1/2\,,\,2/3\}$.

8. **Resolva a equação** $x^2-4x^4=(2x+1)(x-2x^2-x^3)$.

Solução As expressões envolvidas estão bem definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x^4 = (2x+1)(x-2x^2-x^3) &\iff x^2(1-4x^2) = x\,(2x+1)(1-2x-x^2) \\ &\iff x^2(1-2x)(1+2x) - x\,(2x+1)(1-2x-x^2) = 0 \\ &\iff x\,(1+2x)\{x\,(1-2x) - 1 + 2x + x^2\} = 0 \\ &\iff x\,(1+2x)(-x^2+3x-1) = 0 \\ &\iff x\,(1+2x)(x^2-3x+1) = 0\,. \end{aligned}$$

Passo 1: Resolvendo a equação $x = 0$. Elementar!

Passo 2: Resolvendo a equação $1 + 2x = 0$.

$1 + 2x = 0 \iff x = -1/2$

Passo 3: Resolvendo a equação $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Temos que:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Assim, o conjunto solução é $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2}\,, 0\,, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

9. **Resolva a equação $(4x^2-1)(3-x) - (1-2x)(x^2+1) = 0$.**

Solução Comecemos simplificando a equação:

$$\begin{aligned} (4x^2-1)(3-x) - (1-2x)(x^2+1) = 0 &\iff (2x-1)(2x+1)(3-x) - (1-2x)(x^2+1) = 0 \\ &\iff (2x-1)(2x+1)(3-x) + (2x-1)(x^2+1) = 0 \\ &\iff (2x-1)\big[(2x+1)(3-x) + (x^2+1)\big] = 0 \\ &\iff (2x-1)[6x - 2x^2 + 3 - x + x^2 + 1] = 0 \\ &\iff (2x-1)(-x^2+5x+4) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(4x^2-1)(3-x) - (1-2x)(x^2+1) = 0$ se, e somente se,

$$2x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -x^2 + 5x + 4 = 0$$

isto é:

$$x = 1/2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times (-1) \times 4}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{-2} = \frac{5 \mp \sqrt{41}}{2} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{41}}{2} \\ \frac{5-\sqrt{41}}{2}. \end{cases}$$

Assim, a equação dada tem três soluções distintas, a saber:

$$\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{5-\sqrt{41}}{2} \quad ; \quad \frac{5+\sqrt{41}}{2}\,.$$

10. Resolva $(x^2+x+2)(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+2)$.

Solução Primeiramente observemos que todos as expressões envolvidos na equação estão bem definidas em toda a reta. Fatorando a expressão x^3-1 e voltando à equação inicial, obtemos

$$(x^2+x+2)(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x^2+x+2)$$

a qual é eqüivalente a

$$(x^2+x+2)(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+2)=0\,.$$

Colocando o termo $(x-1)(x^2+x+2)$ em evidência, concluímos que a equação inicial é eqüivalente a seguinte equação:

$$\begin{aligned}(x^2+x+2)(x-1)\{x^2+x+1-1\}=0 \quad&\iff\quad (x^2+x+2)(x-1)(x^2+x)=0\\ &\iff\quad (x^2+x+2)(x-1)(x^2+x)=0\\ &\iff\quad x\,(x^2+x+2)(x-1)(x+1)=0\,.\end{aligned}$$

Passo 1: Resolvendo a equação $x=0$.
Elementar: $x=0$.

Passo 2: Resolvendo a equação $x+1=0$.
Elementar: $x=-1$.

Passo 3: Resolvendo a equação $x-1=0$.
Elementar: $x=1$.

Passo 4: Resolvendo a equação $x^2+x+2=0$.
Nesse caso temos: $\Delta=1-4\times 2=-7<0$.
Logo, a equação $x^2+x+2=0$ não tem soluções.

Portanto, o conjunto solução da equação proposta é: $\mathcal{S}=\{0\,,-1\,,1\}$.

11. Determine onde a expressão a seguir se anula e o seu domínio de definição:

$$\frac{1-3x-2x^2}{x-4\sqrt{x}+2}\,. \tag{9.24}$$

Solução O denominador dessa fração só está bem definido para $x\geq 0$. Precisamos agora saber para quais desses valores o denominador se anula. Para isso temos que resolver a equação

$$x-4\sqrt{x}+2=0\,. \tag{9.25}$$

Seja $y=\sqrt{x}$. Com essa mudança de variável a equação (9.25) toma a forma:

$$y^2-4y+2=0 \iff y=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2} \iff y=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2} \iff y=2\pm\sqrt{2}\,.$$

Para voltar a variável x , façamos:

Passo 1: $y = 2 + \sqrt{2}$.

$2 + \sqrt{2} = \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \big(2 + \sqrt{2}\big)^2 = 6 + 4\sqrt{2}$.

Passo 2: $y = 2 - \sqrt{2} > 0$.

$2 - \sqrt{2} = \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \big(2 - \sqrt{2}\big)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$.

Assim, as soluções de (9.25) são: $6 + 4\sqrt{2}$ e $6 - 4\sqrt{2}$.

Consequentemente, o domínio da expressão (9.24) é:

$$\Big[\,0\,, 6 - 4\sqrt{2}\Big) \cup \Big(6 - 4\sqrt{2}\,, 6 + 4\sqrt{2}\Big) \cup \Big(6 + 4\sqrt{2}\,, \infty\Big)\,.$$

Por outro lado, o numerador $1 - 3x - 2x^2$ da expressão (9.24) só se anula quando

$$1 - 3x - 2x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{-4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$
$$\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{17} + 3}{4}\,.$$

No entanto, o denominador não está bem definido para $x = -\dfrac{\sqrt{17} + 3}{4}$.

Portanto, a expressão (9.24) só se anula em $x = \dfrac{\sqrt{17} - 3}{4}$.

Exercícios

1. Resolva as equações:

(a) $2x - 3 = x + 2$ (b) $x - 2 = 3x$
(c) $5x + 2 = x - 3$ (d) $\pi x - 3 = x - 2$.

2. Mostre que $2/3$ pode ser colocado na forma $\alpha\sqrt{2} + 1$ para algum real α . Determine α .

Mostre que todo número racional pode ser colocado na forma $\alpha\sqrt{2}+1$ para algum número real α . Determine α .

Você pode ir mais adiante ?

3. Mostre que todo número real pode ser colocado na forma $\pi\lambda - 1/\sqrt{2}$.

4. Esboce o gráfico das seguintes expressões:

(a) $2x - 1$ (b) $4 - 5x$
(c) $3x + 4$ (d) $2 - \pi x$.

5. Esboce o gráfico das seguintes expressões:

(a) $E(x) = 1$ (b) $E(x) = -2$
(c) $E(x) = \pi$ (d) $E(x) = -\sqrt{2}$.

Elas são expressões do primeiro grau ?

6. Estude o sinal das seguintes expressões:

(a) $2x - 1/5$ (b) $4 - 5x/2$
(c) $3x + 4/5$ (d) $2 - \sqrt{2}x$.

7. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Em cada item a seguir, determine para quais valores do parâmetro λ as equações têm soluções e quais são essas soluções.

(a) $\lambda x - 1/3 = 0$ (b) $4 - \lambda x/2 = 0$
(c) $3x + 4/\lambda = 0$ (d) $\sqrt{2} - x/\lambda = \lambda$.

8. Sejam $a\,, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq b$. Resolva a equação

$$a(x + b) = bx + a^2 .$$

9. Nas equações a seguir determine λ como uma expressão na variável x e diga qual o domínio das expressões encontradas.

(a) $\lambda x - 1/x = 1$ (b) $4 - \lambda x/2 = \lambda$
(c) $3x + 4/\lambda = 2$ (d) $\sqrt{2}/\lambda - x = 1 - \lambda$.

10. Resolva as equações:

(a) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{x+2} = 1$
(b) $\dfrac{1-x}{3} + \dfrac{2}{2x-1} + 1 = x$
(c) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x^2}{x+2} = 2$
(d) $\dfrac{2x-5}{x-2} = 2 + \dfrac{1}{x-2}$
(e) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{2x-3} = \dfrac{3}{6-4x}$.

11. Esboce o gráfico das seguintes expressões:

(a) $|x|$ (b) $2|x| + 1$
(c) $2 - |x|$ (d) $3 + 2|x|$.

12. Descreva todas as expressões do primeiro grau que passam pelo ponto $(0, 2)$. Esboce os seus gráficos.

13. Esboce o gráfico da expressão $ax + b$ nas seguintes situações:

(a) $a > 0$ e $b < 0$
(b) $a > 0$ e $b/a > 0$
(c) $a < 0$ e $b/a > 0$

14. Num mesmo tanque colocamos 4 litros de tinta branca e 13 litros de tinta vermelha. Quantos litros de tinta branca devem ser adicionados para que a nova mistura possua 2/3 de tinta branca ?

15. Resolva as equações:

(a) $x^2 + x - 2 = 0$ (b) $x - 2x^2 = 1$
(c) $2x = 3 - x^2$ (d) $1 + x = 3x^2$
(e) $x^2 - 2x = 8$ (f) $x^2 + 5x = 6$
(g) $3x^2 + x = 0$ (h) $1 + x = 3x^2$

16. Estude o sinal das expressões:

(a) $x^2 + x - 2$ (b) $x - 2x^2 - 1$
(c) $-2x + 3 - x^2$ (d) $1 + x - 3x^2$
(e) $x^2 - 2x - 8$ (f) $x^2 + 5x - 6$
(g) $3x^2 + x$ (h) $1 + x - 3x^2$

17. Para as expressões

(1) $4x^2+2$	(2) $3x^2+5x-7$
(3) $2x^2-20x+17$	(4) $x^2+8x+15$
(5) $5x+3x^2$	(6) $x^2-3x-10$
(7) $x^2-3x+10$	(8) $5x-3x^2$
(9) x^2+x+2	(10) $-1+x+3x^2$
(11) x^2+x-2	(12) $x-2x^2-1$
(13) $-2x+3-x^2$	(14) $1+x-3x^2$
(15) x^2-2x-8	(16) x^2+5x-6
(17) $3x^2+x$	(18) $1+x-3x^2$
(19) x^2-x-3	(20) $3x^2-2x+1$
(21) $8x^2-2x-3$	(22) $\sqrt{2}x^2+5x-\sqrt{8}$
(23) $2x^2-2\sqrt{2}\,x-3$	(24) $\sqrt{2}x^2-x-\sqrt{8}$

listadas acima:

(a) Determine o ponto onde o gráfico da expressão corta o eixo das ordenadas ;
(b) Complete quadrados para colocá-la na forma $(ax+b)^2+c$;
(c) Determine o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo ;
(d) Determine o valor extremo que essa expressão assume e exiba o ponto do domínio onde isso ocorre ;
(e) Determine os pontos onde o gráfico da expressão corta o eixo das abcissas, caso existam ;
(f) Esboce o gráfico dessa expressão, indicando as informações acima obtidas.

18. Resolva a equação

$$\frac{x}{2-x}+\frac{x-1}{2}=x+1\,.$$

19. Resolva a equação

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\frac{2x+1}{x^2-7x+12}=\frac{6}{x^2-6x+8}\,.$$

20. Quais números reais podem ser colocados na forma $2\lambda+1/\lambda$ para algum $\lambda\in\mathbb{R}$?

21. Mostre que um número racional pode ser colocado na forma $\lambda^2+2\lambda+1$ para algum λ racional quando, e somente quando, ele for um quadrado perfeito, isto é, quando ele for da forma p^2/q^2 onde $p\,,q$ são inteiros e $q\neq 0$.

22. Construa uma expressão do segundo grau cujos zeros são $2\pm\sqrt{3}$. Descreva todas as expressões do segundo grau que têm essa propriedade

23. Construa uma expressão do segundo grau que passe pelos pontos $(-1\,,2)$ e $(3\,,2)$ e que se anula em um único ponto. Quantas dessas expressões existe ?

24. Descreva todas as expressão do segundo grau que passam pelos pontos $(-1\,,2)$ e $(3\,,2)$. Esboce o gráfico dessas expressões.

25. Sejam $a\,,b\in\mathbb{R}$. Construa uma expressão do segundo grau que se anula somente nos pontos a e b .

Você poderia descrever todas as expressões do segundo grau que posssuem essa propriedade ?

26. Construa uma expressão do segundo grau que assuma π como valor máximo e tenha -1 e 2 como zeros.

27. Faça esboços gráficos que descrevam com clareza o comportamento da expressão $\lambda x+2$ quando

(a) λ varia no intervalo $[-1\,,1]$;
(b) λ varia em toda a reta.

28. Sejam $a\,,b\,,c\in\mathbb{R}$ onde $a\neq b$. Pergunta-se: é possível construir uma expressão quadrática que se anula nos pontos a e b e que tenha c como valor extremo ?

29. Construa o gráfico de uma expressão da forma ax^2+bx+c que tenha $a>0$ e $c<0$.

30. Faça esboços gráficos que descrevam com clareza o comportamento da expressão $x^2+\lambda$ quando

(a) λ varia no intervalo $[-1\,,1]$;
(b) λ varia no intervalo $(0\,,\infty)$;
(c) λ varia em toda a reta.

31. Faça esboços gráficos que descrevam com clareza o comportamento da expressão λx^2 quando

(a) λ varia no intervalo $[-1\,,1]$;
(b) λ varia no intervalo $(0\,,\infty)$;
(c) λ varia em toda a reta.

32. Faça esboços gráficos que descrevam com clareza o comportamento da expressão $x^2+\lambda x+1$ quando

(a) λ varia no intervalo $[-1\,,1]$;
(b) λ varia no intervalo $(0\,,\infty)$;
(c) λ varia em toda a reta.

33. Faça esboços gráficos que descrevam com clareza o comportamento da expressão $x^2+\lambda x+\lambda$ quando

(a) λ varia no intervalo $[-1\,,1]$;
(b) λ varia no intervalo $(0\,,\infty)$;
(c) λ varia em toda a reta.

34. Considere a expressão ax^2+bx+c . Mostre que se a e c têm sinais contrários então essa expressão se anula em dois pontos distintos.

35. Trocando b por c no exercício anterior, podemos concluir o mesmo resultado ?

36. Considere a expressão $2x^2+bx+b$. Sob que condições podemos garantir que essa expressão possui:

- duas raízes distintas ;
- uma única raiz ;
- nenhuma raiz.

37. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a equação do segundo grau $x^2-\lambda x+16=0$. Determine o domínio de variação de λ afim de que essa equação não tenha raízes reais.

38. Considere a equação $x^2-ax-\lambda=0$. Determine a dependência entre λ e a para que a equação tenha uma única raiz.

39. Determine os valores de k para que a equação $x^2+2(k+2)x+9k=0$ tenha uma única raiz.

40. Sejam α e β as raízes da equação do segundo grau $x^2-bx+c=0$. Determine $\alpha+\beta$ e $\alpha\beta$. Determine também, $\alpha^2+\beta^2$ e $\alpha^3+\beta^3$.

41. Dado um número real x denotamos por $[x]$ o *maior inteiro que é menor ou igual a* x .

Calcule $[x]$ quando:

(a) $x=1,2$ (b) $2x=-3,45$
(c) $x=\sqrt{2}$ (d) $x^3=-7$
(e) $x=-\pi$ (f) $x^2=\sqrt{5}$.

42. Use a definição dada no exercício anterior para decidir se as afirmações a seguir são verdadeiras. Justifique suas respostas.

(a) $[x^2]=[x]^2$ (b) $[2x]=2[x]$
(c) $[x+y]=[x]+[y]$ (d) $[1+x]=1+[x]$
(e) $x \leq [x]$ (f) $|\,[x]\,| = [\,|x|\,]$.

43. Resolva as equações:

(a) $[x]=4$ (b) $[x^2]=4$
(c) $[x-2]=2[x]$ (d) $[x]^2-8[x]=0$
(e) $[x]^2-5=0$ (f) $[x]^2-2[x]=2$.

44. Esboce o gráfico da expressão $[x]$. Esboce os gráficos de $[x]$ e de x num mesmo quadro e compare-os.

45. Esboce num mesmo quadro os gráficos das expressões $2x$ e $[2x]$.

46. Mostre que a equação

$$\frac{x}{\lambda-x}=\frac{1}{x}$$

tem exatamente duas soluções quando $\lambda \neq 0$. Determine essas soluções. O que podemos dizer sobre as soluções dessa equação quando $\lambda=0$?

47. Resolva as equações:

(a) $x^2-3|x|+2=0$
(b) $-x^2+3|x|+2=0$
(c) $x^2-|x|-6=0$
(d) $2x^2-|x|-2=0$
(e) $x^4-3x^2+2=0$
(f) $2x^4-x^2-3=0$
(g) $-x^4+x^2+5=0$
(h) $x^4-3x^2+2=0$

48. Fatore as expressões:

(a) $x^2-3|x|+2$
(b) $x^2-|x|-2$
(c) $-x^2+|x|+6$
(d) x^4-3x^2-10
(e) x^6-5x^3+6
(f) $2x^4+3x^2-2$
(g) $x+\sqrt{x}-2$
(h) $|x|^3-x^2-12|x|$

49. Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$x^2 - a^2 = (|x| + a)(|x| - a)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$

50. Determine para quais valores de x e expressão $2x - 3\sqrt{x}$ assume, respectivamente, os valores 2 , -2 , 6 e -5 .

51. Determine o domínio de definição das seguintes expressões e os pontos onde elas se anulam. Simplifique-as quando possível.

(a) $\dfrac{x-2}{x^2-5}$
(b) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$
(c) $\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$
(d) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$
(e) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-2x}}$
(f) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$
(g) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}}$
(h) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^3-5x^2+4x}}$

52. Use a técnica de *mudança de variável* para resolver as seguintes equações:

(a) $|3 - 5x| = 4$
(b) $|x^2 - 5x + 4| = 2$
(c) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 1$
(d) $\sqrt{x - 5\sqrt{x} + 4} = 2$
(e) $(2 - |x|)^4 = 3$.
(f) $x^{2/3} - x^{1/3} - 6 = 0$

53. Resolva as equações:

(a) $|3 - 5x|(x^2 - x)^2 = 0$
(b) $(2x - 1)^3(2x^2 + 3x - 4) = 0$
(c) $(x - 2)(-x^2 + 2x + 1) = x^2 - 3x + 2$
(d) $|3 - 5x| = 4|x^2 - x - 1|$
(e) $(x - 1)^3(x^2 - 2)^2 = 0$.

54. Determine o domínio e os pontos onde as expressões a seguir se anulam.

(a) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}-2x}$
(b) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-3\sqrt{x}+2}}$

55. Dê o domínio e esboce o gráfico das expressões:

(a) x/x (b) $x/|x|$
(c) x^2/x (d) $x^2/|x|$
(e) $|x^3|/x$ (f) $x^3/|x|$
(g) $x\,|x|$ (h) $x^2\,|x|$.

10

Simplificando equações

Para resolver uma equação precisamos simplificá-la: essencialmente, reduzí-la a uma equação a qual sabemos resolver. Para isso, é importante saber quais operações podemos executar sobre uma equação, afim de resolvê-la. Já vimos que a operação de mudança de variável pode ser extremamente conveniente para simplificar uma equação e facilitar sua resolução, desde que a mudança de variável seja uma mudança apropriada para a equação.

Nessa lição trataremos de dois tipos de operações sobre equações:

✯ *Aquelas que não modificam o conjunto das soluções da equação* ;

Por exemplo:

- ☞ *somar* ou *subtrair* um número real à ambos os membros da equação ;
- ☞ *multiplicar* ou *dividir* ambos os membros da equação por um número real **não nulo** ;
- ☞ *elevar a um expoente ímpar positivo* ambos os membros da equação ;
- ☞ *extrair uma raiz de índice ímpar* de ambos os membros da equação.

Existem outras operações que podemos fazer sobre uma equação sem modificar o conjunto das soluções. Quando usamos apenas esse tipo de operações dizemos que a equação inicial é *equivalente* a equação simplificada e escrevemos:

$$\boxed{\text{Equação inicial}} \iff \boxed{\text{Equação simplificada}}$$

Nesse caso, resolvida a equação simplificada, não precisamos testar as soluções na equação inicial pois as operações utilizadas não introduziram soluções alheias à equação inicial.

Exemplos

❄ $2x+3=7x-1 \iff 4=5x \iff x=4/5$;

❄ $\sqrt[3]{2x^2-x}=x \iff 2x^2-x=x^3 \iff x(x^2-2x+1)=0$
$\iff x(x-1)^2 \iff x=0$ ou $x=1$;

❄ $(x+2)^3 = x^6 \iff x+2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1$.

✯ *Aquelas que podem introduzir soluções alheias a equação inicial.*

Por exemplo:

- ☞ *elevar a um expoente par positivo* ambos os membros da equação ;
- ☞ *retirar o módulo de um termo da equação do tipo* $|A|$ *e substituí-lo por* "A" *e* "$-A$", produzindo duas equações, como mostrado no exemplo a seguir.

Aqui citamos dois exemplos desse tipo de operação que podem inserir novas soluções na equação mas, existem outros. Quando usamos essas operações dizemos que a equação inicial *implica* a equação simplificada e escrevemos:

$$\boxed{\text{Equação inicial}} \implies \boxed{\text{Equação simplificada}}$$

Isso quer dizer que toda solução da equação inicial também é solução da equação simplificada. Usando essas operações *não perdemos soluções*. No entanto, resolvida a equação simplificada, *precisamos testar as soluções na equação inicial* pois as operações utilizadas **podem introduzir** *soluções alheias* à equação inicial.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplos

❄ Considere a equação $|x+1| = 2x$. Temos que:

$$|x+1| = 2x \implies \begin{cases} x+1 = 2x \\ ou \\ -(x+1) = 2x \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ 3x = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = -1/3\,. \end{cases}$$

Voltando a equação inicial, verificamos que $x = 1$ *é solução*. No entanto, $x = -1/3$ *não é solução* dessa equação. Assim, $\mathcal{S} = \{1\}$.

❄ Para a equação $x|x| + 2x = 1$ temos:

$$x|x| + 2x = 1 \implies \begin{cases} x^2 + 2x = 1 \\ ou \\ -x^2 + 2x = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 \\ ou \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \\ ou \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{2} \\ ou \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{2} \\ ou \\ x = 1\,. \end{cases}$$

Testando as soluções na equação inicial concluímos:

- ☞ $x = 1$ não é solução;

☞ $x = -1-\sqrt{2}$ não é solução pois é facil observar que um número negativo não pode ser solução da equação inicial;

☞ Para $x = \sqrt{2}-1$ temos:
$(\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2-1 = 1\,.$

Portanto, $x = \sqrt{2}-1$ é a única solução da equação proposta.

❄ Considere a equação $\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2-2}\,$. Temos que:

$$\begin{array}{llllll} \sqrt{x-2} = \sqrt{x^2-2} & \Longrightarrow & x-2 = x^2-2 & \Longleftrightarrow & x^2 - x = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x(x-1) = 0 & \Longleftrightarrow & x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{array}$$

Voltando a equação inicial verificamos que nem $x = 0$, nem $x = 1$ são soluções da equação inicial. Consequentemente, a equação considerada não tem soluções.

❄ Na equação $\sqrt{2|x|-1} = x$ temos:

$$\begin{array}{llllllll} \sqrt{2|x|-1} = x & \Longrightarrow & 2|x|-1 = x^2 & \Longleftrightarrow & |x|^2 - 2|x| + 1 = 0 & \Longleftrightarrow & (|x|-1)^2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & |x| = 1 & \Longleftrightarrow & x = \pm 1\,. \end{array}$$

Voltando a equação inicial, verificamos que $x = 1$ é de fato solução mas, $x = -1$ não é solução.

❄ Em $\sqrt{1+x^2} = x^2$ temos:

$$\sqrt{1+x^2} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + x^2 = x^4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^4 - x^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \tfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\,.$$

Daí obtemos $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Testando esses valores na equação inicial, verificamos que ambos são soluções.

❄ Considere a equação $x = \sqrt{3x-2}\,$. Para resolvê-la, fazemos:

$$\begin{array}{llllllll} x = \sqrt{3x-2} & \Longrightarrow & x^2 = 3x-2 & \Longleftrightarrow & x^2 - 3x + 2 = 0 & \Longleftrightarrow & (x-1)(x-2) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = 1 \text{ ou } x = 2\,. \end{array}$$

Testando esses valores na equação inicial, verificamos que ambos são soluções dessa equação.

De uma forma geral dizemos que duas equações são *equivalentes* quando têm exatamente as mesmas soluções. Dizemos que uma equação *implica* uma outra equação quando toda solução da primeira equação também é solução da segunda.

Note que:

☞ se a Equação A é equivalente a Equação B e se a Equação B é equivalente à Equação C então a Equação A é equivalente a Equação C.

☞ se a Equação A implica a Equação B e se a Equação B implica a Equação C então a Equação A implica a Equação C.

☞ se a Equação A implica a Equação B e se a Equação B é equivalente à Equação C então a Equação A implica a Equação C.

☞ se a Equação A é equivalente à Equação B e se a Equação B implica a Equação C então a Equação A implica a Equação C.

☞ se a Equação A é equivalente à Equação B então a Equação A implica a Equação B

1 Resolvendo equações com módulo

Uma técnica para resolver equações com módulo é a aplicação sucessiva da simplificação que acabamos de descrever. Para isso devemos seguir os seguintes passos:

☞ **1° Passo:**

Para cada expressão do tipo $|A|$, construimos 2 equações: uma trocando $|A|$ por A e outra trocando $|A|$ por $-A$.

Exemplo:

$$2-\Big|x+|2x+1|-2\Big|=2+|x| \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2-\Big|x+2x+1-2\Big|=2+|x| \\ ou \\ 2-\Big|x-(2x+1)-2\Big|=2+|x|\,. \end{cases}$$

☞ **2° Passo:**

Aplicar a operação acima até eliminar todos os módulos.

Note que para cada módulo retirado construimos 2 equações. No exemplo acima, ao retirar todos os módulos teremos construído 2^3 equações pois temos 3 módulos na equação do exemplo.

☞ **3° Passo:**

Retirados todos os módulos resolvemos as equações resultantes. Depois, testamos todas as soluções na equação inicial pois esse processo (como vimos na página 193) pode introduzir soluções estranhas à equação inicial.

Exemplos

Em $2-\Big|x+|2x+1|-2\Big|=2+|x|$ a operação de retirar os módulos vai produzir as seguintes 8 equações:

☞ Retirando um primeiro módulo, obtemos:
$2-\Big|x+2x+1-2\Big|=2+|x| \quad ; \quad 2-\Big|x-(2x+1)-2\Big|=2+|x|\,.$

☞ Retirando um segundo módulo, obtemos:

$2-\left|x+2x+1-2\right|=2+x \quad ; \quad 2-\left|x-(2x+1)-2\right|=2+x$

$2-\left|x+2x+1-2\right|=2-x \quad ; \quad 2-\left|x-(2x+1)-2\right|=2-x\,.$

☞ Retirando o terceiro módulo, obtemos:

$2-(x+2x+1-2)=2+x \quad ; \quad 2-\Big(x-(2x+1)-2\Big)=2+x$

$2+x+2x+1-2=2+x \quad ; \quad 2+x-(2x+1)-2=2+x$

$2-(x+2x+1-2)=2-x \quad ; \quad 2-\Big(x-(2x+1)-2\Big)=2-x\,.$

$2+x+2x+1-2=2-x \quad ; \quad 2+x-(2x+1)-2=2-x\,.$

Exercícios resolvidos

1. **Resolva a equação $\sqrt{1-2x}=x+1$.**

Solução Temos que

$$\sqrt{1-2x}=x+1 \implies 1-2x=x^2+2x+1 \implies x^2+4x=0 \implies x(x+4)=0\,.$$

Assim, $x=0$ ou $x=-4$. Testando esses valores na equação inicial, verificamos que, de fato, eles são soluções dessa equação.

2. **Resolva a equação $\sqrt{2-x^4}=x$.**

Solução Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{2-x^4}=x &\implies 2-x^4=x^2 \implies x^4+x^2-2=0 \implies x^2=\tfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\tfrac{-1\pm 3}{2}\\ &\implies x^2=1 \implies x\pm 1\,.\end{aligned}$$

Voltando à equação inicial, verificamos que $x=1$ é raiz mas, $x=-1$ não o é. Assim, $\mathcal{S}=\{1\}$.

3. **Resolva a equação $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{12}$.**

Solução Temos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{12} &\implies \sqrt{5+x}=\sqrt{12}-\sqrt{5-x}\\ &\implies 5+x=12-2\sqrt{12}\sqrt{5-x}+5-x\\ &\implies 2x-12=-2\sqrt{12(5-x)} \implies x-6=-\sqrt{12(5-x)}\\ &\implies x^2-12x-36=60-12x \implies x^2=24\\ &\implies x=\pm 2\sqrt{6}\,.\end{aligned}$$

Resta agora verificar se esses valores são, de fato, soluções da equação inicial.

Primeiramente observamos que a equação tem *simetria em relação a origem*, isto é, trocando x por $-x$ a equação não se altera. Isso significa que se b é solução então $-b$ também o é.

Vamos mostrar que $2\sqrt{6}$ é solução[1]:

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = 5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}+2\sqrt{5+2\sqrt{6}}\sqrt{5-2\sqrt{6}} = 10+2\sqrt{25-24} = 12\,.$$

Isso mostra que $2\sqrt{6}$ é solução. Da simetria da equação, segue que o conjunto solução é: $\mathcal{S} = \{\pm 2\sqrt{6}\}$.

4. **Resolva a equação $\sqrt{2x-2}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x}$.**

Solução Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-2}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x} \quad &\Longrightarrow \quad 2x-2+2-x+2\sqrt{(2x-2)(2-x)} = x\\ &\Longrightarrow \quad 2\sqrt{(2x-2)(2-x)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x=1 \text{ ou } x=2\,.\end{aligned}$$

Testando esses valores na equação inicial, concluímos que ambos são soluções. Portanto, $\mathcal{S} = \{1\,,2\}$.

5. **Determine as soluções de $\sqrt[3]{2x(x-4)} = \sqrt{2x}$.**

Solução Elevando ambos os membros à sexta[2] potência, teremos:

$$\sqrt[3]{2x(x-4)} = \sqrt{2x} \quad \Longrightarrow \quad 2^2x^2(x-4)^2 = 2^3x^3 \quad \Longrightarrow \quad x^2(x-4)^2 = 2x^3\,.$$

Agora, devemos resolver a equação

$$x^2(x-4)^2 = 2x^3\,.$$

Temos que

$$\begin{aligned}x^2(x-4)^2 = 2x^3 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2(x-4)^2 - 2x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2\{(x-4)^2-2x\} = 0 &(10.1)\\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 = 0 \text{ ou } (x-4)^2 - 2x = 0\,. &(10.2)\end{aligned}$$

Passo 1: Resolvendo a equação $x^2 = 0$.

Elementar! Solução $x = 0$.

Passo 2: Resolvendo a equação $(x-4)^2 = 2x$.

Temos que:

$$\begin{aligned}(x-4)^2 = 2x \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2-8x+16 = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-10x+16=0 &(10.3)\\ &\Longleftrightarrow \quad x=2 \text{ ou } x=8 &(10.4)\end{aligned}$$

[1] Note que $5 > 2\sqrt{6}$.

[2] Elevar a sexta potência corresponde a elevar ao quadrado por três vezes.

Voltando à equação $\sqrt[3]{2x(x-4)} = \sqrt{2x}$ e testando $x = 0$, $x = 2$ e $x = 8$, concluímos que a única solução é a solução nula.

☛ Note que a primeira operação que fizemos sobre a equação foi uma operação que poderia introduzir soluções estranhas. Por isso, apesar das equivalências em (10.1),(10.2),(10.3) e (10.4), precisamos testar as soluções encontradas.

6. Resolva a equação $|x-1| + 2x = |x|$.

Solução: Operando sobre o primeiro módulo obtemos as equações
$x - 1 + 2x = |x| \quad ; \quad -(x-1) + 2x = |x|.$

Operando sobre o segundo módulo, obtemos:

$$x - 1 + 2x = x \quad ; \quad x - 1 + 2x = -x \quad ; \quad -(x-1) + 2x = x \quad ; \quad -(x-1) + 2x = -x.$$

Resolvendo as equações resultantes:

(a) $x - 1 + 2x = x \iff 2x = 1 \iff x = 1/2$;

(b) $x - 1 + 2x = -x \iff 4x = 1 \iff x = 1/4$;

(c) $-(x-1) + 2x = x \iff -x + 1 + 2x = x \iff 1 = 0$ (equação sem solução) ;

(d) $-(x-1) + 2x = -x \iff -x + 1 + 2x = -x \iff 2x = -1 \iff x = -1/2$.

Testando as soluções na equação inicial:

$|\frac{1}{2} - 1| + 2 \times \frac{1}{2} = |\frac{1}{2}| \iff \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ portanto $x = 1/2$ não é solução.

$|\frac{1}{4} - 1| + 2 \times \frac{1}{4} = |\frac{1}{4}| \iff \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$ portanto $x = 1/4$ não é solução.

$|-\frac{1}{2} - 1| - 2 \times \frac{1}{2} = |-\frac{1}{2}| \iff \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \iff \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$ portanto $x = 1/2$ é solução.

Consequentemente, $\mathcal{S} = \{-1/2\}$.

7. Resolva a equação $\Big|3x + |1-x|\Big| = |x| + 1$.

Solução: Operando sobre o primeiro módulo obtemos as equações
$3x + |1-x| = |x| + 1 \quad ; \quad -(3x + |1-x|) = |x| + 1$.

Operando sobre o segundo módulo, obtemos:

$3x + 1 - x = |x| + 1$

$3x - 1 + x = |x| + 1$

$-3x - (1-x) = |x| + 1$

$-3x + (1-x) = |x| + 1$.

Operando sobre o terceiro módulo, obtemos 8 equações:

☞ $3x + 1 - x = x + 1$

☞ $3x + 1 - x = -x + 1$

☞ $3x - 1 + x = x + 1$

☞ $3x - 1 + x = -x + 1$

☞ $-3x - (1-x) = x + 1$

☞ $-3x - (1-x) = -x + 1$

☞ $-3x + (1-x) = x + 1$

☞ $-3x + (1-x) = -x + 1$.

Resolvendo as equações resultantes:

(a) $3x+1-x=x+1 \iff x=0$;
(b) $3x+1-x=-x+1 \iff x=0$;
(c) $3x-1+x=x+1 \iff 3x=2 \iff x=2/3$;
(d) $3x-1+x=-x+1 \iff 5x=2 \iff x=2/5$;
(e) $-3x-(1-x)=x+1 \iff 3x=-2 \iff x=-2/3$;
(f) $-3x-(1-x)=-x+1 \iff x=-2$;
(g) $-3x+(1-x)=x+1 \iff x=0$;
(h) $-3x+(1-x)=-x+1 \iff x=0$.

Testando as soluções na equação inicial:

$\Big|3\times 0+|1-0|\Big|=|0|+1 \iff 1=1$. Portanto, $x=0$ é solução.

$\Big|3\times \frac{2}{3}+|1-\frac{2}{3}|\Big|=|\frac{2}{3}|+1 \iff \frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{3}{3}$. Portanto $x=2/3$ não é solução.

$\Big|3\times \frac{2}{5}+|1-\frac{2}{5}|\Big|=|\frac{2}{5}|+1 \iff \frac{6}{5}+\frac{3}{5}=\frac{2}{5}+\frac{5}{5}$. Portanto $x=2/5$ não é solução.

$\Big|-3\times \frac{2}{3}+|1+\frac{2}{3}|\Big|=|-\frac{2}{3}|+1 \iff |-\frac{6}{3}+\frac{5}{3}|=\frac{5}{3}$. Portanto $x=-2/3$ não é solução.

$\Big|-3\times 2+|1+2|\Big|=|-2|+1 \iff |-6+3|=3$. Portanto $x=-2$ é solução.

Finalizando, temos: $\mathcal{S}=\{0\,,\,-2\}$

O próximo exercício mostra como pode ser traiçoeira essa técnica de simplificar equações usando operações que introduzem soluções alheias a equação inicial. Já imaginou se na equação simplificada todos os números reais são soluções? Como descobrir, dentre eles, aqueles que de fato são soluções da equação inicial? Esse problema aparece na próxima equação.

8. Resolva a equação $|x|+1=x+1$.

Solução Seguindo a técnica apresentada nessa lição, consideremos as equações $x+1=x+1$ e $-x+1=x+1$. Resolvendo-as:

(a) $x+1=x+1$. Todo número real é solução dessa equação ;
(b) $-x+1=x+1 \iff 2x=0 \iff x=0$.

Todo número real é solução da primeira das equações resultantes da simplificação. E agora? Claro, não vamos testar todos os reais para saber qual deles é solução da equação inicial. O que precisamos é encontrar uma técnica mais adequada a esse tipo de equação. Veremos isso na próxima lição.

Verificamos com facilidade que $x=0$ é solução da equação inicial. Consequentemente, o que podemos concluir no momento é: $\mathcal{S}\supset\{0\}$.

De fato a equação em estudo é bastante simples e somos capazes de dizer quais são as suas soluções, sem precisar de técnica nenhuma. E qual é essa solução?

9. **Resolva a seguinte equação :** $|x| + 2\sqrt{x^2+x-6} = x$ **.**

Solução Temos que

$$|x| + 2\sqrt{x^2+x-6} = x \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + 2\sqrt{x^2+x-6} = x & (i) \\ \quad \text{ou} \\ -x + 2\sqrt{x^2+x-6} = x & (ii) \end{cases}$$

Precisamos agora resolver as equações (i) e (ii).

Para resolver (i) façamos:

$$\begin{aligned} x + 2\sqrt{x^2+x-6} = x \quad & \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{x^2+x-6} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+x-6=0 \\ & \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times(-6)}}{2} \\ & \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1\pm 5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x=-3 \quad \text{ou} \quad x = 2\,. \end{aligned}$$

Para resolver (ii) façamos:

$$\begin{aligned} -x + 2\sqrt{x^2+x-6} = x \quad & \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{x^2+x-6} = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2+x-6} = x \\ & \Longrightarrow \quad x^2+x-6 = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x-6=0 \\ & \Longleftrightarrow \quad x = 6\,. \end{aligned}$$

Na técnica que utilizamos para resolver a equação inicial, fizemos uso de operações que podem inserir soluções estranhas a essa equação. Conseqüentemente, devemos testar os valores encontrados, a saber: 2 , -3 e 6 .

☞ *Testando as prováveis soluções*:

❄ Avaliando cada membro da equação inicial em $x = 2$ obtemos:

- $|x| + 2\sqrt{x^2+x-6}\,\Big]_{x=2} = 2 + 2\sqrt{4+2-6} = 2\,;$
- $x\,\Big]_{x=2} = 2\,.$

Isso mostra que, de fato, $x = 2$ é solução da equação inicial.

❄ Avaliando cada membro da equação inicial em $x = -3$ obtemos:

- $|x| + 2\sqrt{x^2+x-6}\,\Big]_{x=-3} = 3 + 2\sqrt{9-3-6} = 3\,;$
- $x\,\Big]_{x=-3} = -3\,.$

Isso mostra que $x = -3$ não é solução da equação inicial.

❄ Avaliando cada membro da equação inicial em $x = 6$ obtemos:

- $|x| + 2\sqrt{x^2+x-6}\,\Big]_{x=6} = 6 + 2\sqrt{36+6-6} = 6 + 12 = 18\,;$
- $x\,\Big]_{x=6} = 6\,.$

Isso mostra que $x = 6$ também não é solução da equação inicial.

Concluímos então que a equação proposta tem uma única solução, a saber, $x = 2$.

10. Resolva a equação $(x-1)\sqrt{2x^2-x-2} = x\,(1-x)$.

Solução Temos que

$$\begin{aligned}(x-1)\sqrt{2x^2-x-2} = x\,(1-x) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x-1)\sqrt{2x^2-x-2} - x\,(1-x) = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad (x-1)\sqrt{2x^2-x-2} + x\,(x-1) = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad (x-1)\big\{\sqrt{2x^2-x-2} + x\big\} = 0\\ &\Longrightarrow \quad x-1=0 \ \text{ ou } \ \sqrt{2x^2-x-2}+x=0\,.\end{aligned}$$

Por outro lado, avaliando a expressão $2x^2-x-2$ em $x=1$ temos:

$$2x^2-x-2\Big]_{x=1} = 2-1-2 < 0\,.$$

Isso significa que $x=1$ não é solução da equação inicial.

Resta agora resolver a equação $\sqrt{2x^2-x-2}+x=0$. Para isso, façamos:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-2}+x=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{2x^2-x-2} = -x \quad \Longrightarrow \quad 2x^2-x-2 = x^2\\ &\Longleftrightarrow \quad x^2-x-2=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-2)}}{2}\\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x=-1 \ \text{ ou } \ x=2\,.\end{aligned}$$

Na técnica que utilizamos para resolver a equação inicial fizemos uso de operações que podem inserir soluções estranhas a essa equação. Conseqüentemente, devemos testar os valores encontrados, a saber: -1 e 2.

☞ *Testando as prováveis soluções*:

❄ Avaliando cada membro da equação inicial em $x=-1$ obtemos:

– $(x-1)\sqrt{2x^2-x-2}\Big]_{x=-1} = -2\sqrt{2+1-2} = -2$

– $x(1-x)\Big]_{x=-1} = -(1+1) = -2$

Isso mostra que, de fato, $x=-1$ é solução da equação inicial.

☞ Avaliando cada membro da equação inicial em $x=2$ obtemos:

– $(x-1)\sqrt{2x^2-x-2}\Big]_{x=2} = \sqrt{2\times4-2-2} = 2$

– $x(1-x)\Big]_{x=2} = 2\times(-1) = -2$

Isso mostra que $x=2$ não é solução da equação inicial.

Concluímos então que a equação proposta tem uma única solução, a saber, $x = -1$.

11. **Determine o domínio de definição da expressão $\dfrac{|x^2 - 3x| - |x| - 1}{4 - x + x^2}$ e os pontos onde a expressão se anula.**

Solução Para determinar o domínio da expressão devemos analisar onde o denominador $4 - x + x^2$ se anula. Temos que: $\Delta = 1 - 4 \times 4 = -15 < 0$. Logo, o denominador nunca se anula. Por outro lado, o numerador está bem definido em toda a reta. Consequentemente a expressão dada está bem definida para todo número real.

Agora, para saber onde a expressão se anula, devemos resolver a equação

$$|x^2 - 3x| - |x| - 1 = 0\,. \tag{10.5}$$

Para isso, fazemos:

Passo 1: Retirando um primeiro módulo obtemos as equações

$x^2 - 3x - |x| - 1 = 0 \quad ; \quad -(x^2 - 3x) - |x| - 1 = 0\,.$

Passo 2: Retirando o segundo módulo obtemos

$x^2 - 3x - x - 1 = 0 \quad ; \quad -(x^2 - 3x) - x - 1 = 0$

$x^2 - 3x + x - 1 = 0 \quad ; \quad -(x^2 - 3x) + x - 1 = 0$

Resolvendo as 4 equações resultantes, obtemos:

- ☞ $x^2 - 3x - x - 1 = 0 \iff x^2 - 4x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}\,.$
- ☞ $x^2 - 3x + x - 1 = 0 \iff x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\,.$
- ☞ $-(x^2 - 3x) - x - 1 = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1\,.$
- ☞ $-(x^2 - 3x) + x - 1 = 0 \iff x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}\,.$

Para facilitar o teste das raízes, coloquemos a equação (10.5) na forma

$$|x| \times |x-3| - |x| = 1 \iff |x|\big(|x-3| - 1\big) = 1\,.$$

Testando as soluções obtidas na equação inicial, obtemos:

$|2+\sqrt{5}|\big(|2+\sqrt{5}-3| - 1\big) = 1 \iff \big(2+\sqrt{5}\big)\big(\sqrt{5}-2\big) = 1 \iff 5 - 4 = 1.$
Portanto, $2 + \sqrt{5}$ é solução.

$|2-\sqrt{5}|\big(|2-\sqrt{5}-3| - 1\big) = 1 \iff \big(\sqrt{5}-2\big)\sqrt{5} = 1.$
Portanto, $2 - \sqrt{5}$ não é solução.

$|1+\sqrt{2}|\big(|1+\sqrt{2}-3| - 1\big) = 1 \iff \big(1+\sqrt{2}\big)\big(1-\sqrt{2}\big) = 1 \iff 1 - 2 = 1.$
Portanto, $1 + \sqrt{2}$ não é solução.

$|1-\sqrt{2}|\big(|1-\sqrt{2}-3| - 1\big) = 1 \iff \big(\sqrt{2}-1\big)\big(\sqrt{2}+1\big) = 1 \iff 2 - 1 = 1.$
Portanto, $1 - \sqrt{2}$ é solução.

$|1|\big(|1-3|-1\big)=1 \iff 2-1=1\,.$
Portanto, 1 é solução.
$|2+\sqrt{3}|\big(|2+\sqrt{3}-3|-1\big)=1 \iff \big(2+\sqrt{3}\big)\big(\sqrt{3}-2\big)=1 \iff 3-4=1.$
Portanto, $2+\sqrt{3}$ não é solução.
$|2-\sqrt{3}|\big(|2-\sqrt{3}-3|-1\big)=1 \iff \big(2-\sqrt{3}\big)\sqrt{3}=1.$
Portanto, $2-\sqrt{3}$ não é solução.

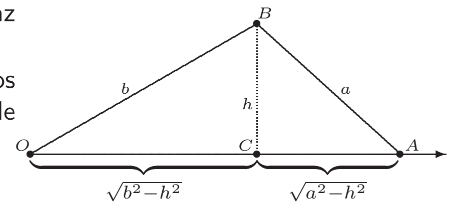
Assim, o conjunto dos pontos onde a expressão inicial se anula é: $\mathcal{S}=\Big\{2+\sqrt{5}\;,1-\sqrt{2}\;,1\Big\}$.

12. Considere o triângulo OAB de lados $a\,,b\,,c$ como na figura abaixo, onde o vértice B se projeta ortogonalmente sobre o lado OA. Mostre que a altura em relação ao lado c satisfaz a equação:

$$\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}=c\,. \tag{10.6}$$

Deduza a expressão da altura h e mostre que $\pm h$ são as duas únicas soluções dessa equação.

Solução Vamos então mostrar que a altura h do triângulo satisfaz a equação (10.6).
Na figura ao lado, a base OA tem comprimento c. Os triângulos OCB e CAB são triângulos retângulos e aplicando o Teorema de Pitágoras a cada um deles, concluímos que



$$\sqrt{a^2-h^2}+\sqrt{b^2-h^2}=c\,.$$

Isso mostra que a altura h satisfaz a equação (10.6).

Vamos agora resolver a equação (10.6).

Para começar, observemos que, sendo $x=h$ uma solução dessa equação então $x=-h$ também o é, pois $h^2=(-h)^2$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}=c &\iff \sqrt{a^2-x^2}=c-\sqrt{b^2-x^2}\\
&\implies a^2-x^2=c^2+b^2-x^2-2c\sqrt{b^2-x^2}\\
&\implies 2c\sqrt{b^2-x^2}=c^2+b^2-a^2\\
&\implies 4c^2(b^2-x^2)=(c^2+b^2-a^2)^2\\
&\implies b^2-x^2=\frac{(c^2+b^2-a^2)^2}{4c^2}\\
&\implies x^2=b^2-\frac{(c^2+b^2-a^2)^2}{4c^2}\,.
\end{aligned}$$

Note que o lado direito da última igualdade é positivo pois já mostramos que a altura h do triângulo é solução da equação (10.6). Além disso, essa última igualdade mostra que as únicas soluções de (10.6) são de fato $\pm h$ onde

$$h=\sqrt{b^2-\frac{(c^2+b^2-a^2)^2}{4c^2}}\,. \tag{10.7}$$

Simplificando essa expressão obtemos:

$$\begin{aligned}
b^2 - \frac{(c^2+b^2-a^2)^2}{4c^2} &= \Big(b + \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\Big)\Big(b - \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\Big) \\
&= \frac{2bc+c^2+b^2-a^2}{2c} \times \frac{2bc-c^2-b^2+a^2}{2c} \\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{2c} \times \frac{a^2-(c-b)^2}{2c} \\
&= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2c} \times \frac{(a-c+b)(a+c-b)}{2c} \\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}\,.
\end{aligned}$$

Assim, a altura h também é dada por

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\,.$$

Exercícios

1. Resolva as equações:
(1) $|x-3|-2=0$;
(2) $|x-3|=|2|$;
(3) $|4+x|=x$;
(4) $|x-2|=|2x|-2$;
(5) $|x+2|=|x|-2$;
(6) $|x+2|=2-|x|$;
(7) $\big||x+8|-x\big|=0$;
(8) $\big||x+4|+|x|\big|=3$;
(9) $\big||x-1|+x^2\big|=1$;
(10) $x^2+|x|=0$;
(11) $x^3+|x|=0$.

2. Resolva a equação $\big||x-3|-|x+1|\big|=0$.

3. Resolva as equações:
(a) $\sqrt{2x^2-9}=x$
(b) $\sqrt{2x^2-9}=x^2$
(c) $\sqrt{x^2-3x}=2x-5$
(d) $\sqrt{3-2x}=3-\sqrt{2x+2}$
(e) $\sqrt{x+10}+\sqrt[4]{x+10}=2$

4. Sejam $a,b\in\mathbb{R}^*$. Resolva a equação

$$2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$$

5. Resolva as equações:
(a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}-\sqrt{8x+1}=0$
(b) $\sqrt{x^2+x-2}=x$
(c) $\sqrt{2x^2+x-2}=x$

6. Determine as soluções de:
(a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1$
(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=0$
(c) $\sqrt[4]{2x^2-1}=x$
(d) $\sqrt{x}=\sqrt[3]{x^2-2x}$
(e) $\sqrt{\dfrac{1+x}{2+x}}=\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}$

7. Resolva as seguintes equações:

(a) $|x|-2|x-1|=2$
(b) $2x-|x^2-1|=1$
(c) $x^2+|x|=|1-x|$
(d) $\big||x-2|-2x\big|=2-4x$
(e) $\sqrt{1-|x-1|+x^2}=1$
(f) $\sqrt{|x-2x^2|}=\sqrt{2+x}$.

8. Determine os pontos da reta cuja distância ao ponto 2 é igual ao quadrado da sua distância ao ponto 3.

9. Determine o domínio de definição da expressão

$$\frac{|2x-1|-x^2}{1+x-2x^2}$$

e os pontos onde ela se anula.

10. Idem para a expressão

$$\frac{|x|-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^2+2x-4}}.$$

11. Determine os pontos da reta cujo quadrado da sua distância ao ponto 1 é o dobro da distância ao ponto 3.

12. Determine os pontos da reta cujo quadrado, transladado de 5 coincide com o triplo de sua distância ao ponto 1.

13. Determine os pontos da reta cuja raiz quadrada do seu transladado por 3 coincide com a distância com a distância da raiz quadrada desse ponto ao ponto 1.

11

Estudando o sinal de expressões

Nessa lição vamos aprender como analizar o *sinal de uma expressão*, isto é, determinar onde a expressão é positiva, onde ela é negativa e onde ela se anula. Esse é um ponto importante no estudo de uma expressão.

No curso de Cálculo I você vai utilizar esse tipo de análise para determinar os intervalos nos quais as expressões estudadas são crescentes e os intervalos onde elas são decrescentes.

Comecemos com a expressão:

$$(x-1)(3-x) \tag{11.1}$$

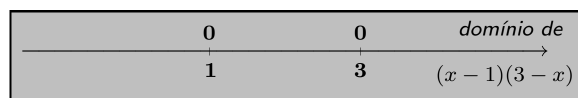
cujo domínio é toda a reta.

Primeiramente, vamos determinar os pontos onde essa expressão se anula. Para isso, devemos resolver o que chamamos de *equação associada à expressão*:

$$(x-1)(3-x)=0 \tag{11.2}$$

cujo conjunto solução é $\mathcal{S}=\{1\,,\,3\}$.

Na figura ao lado exibimos o domínio e os zeros da expressão:



Passemos agora a análise do sinal de $(x-1)(3-x)$ nos intervalos:

$$(-\infty\,,1\,) \quad ; \quad (\,1\,,3\,) \quad \text{e} \quad (\,3\,,\infty)\,.$$

Na seção **??** da Lição **??** aprendemos a analizar o sinal do trinômio do segundo grau e conseqüentemente, sabemos analizar com facilidade o sinal da expressão em estudo. No entanto, vamos introduzir uma nova técnica que permitirá fazer a análise do sinal de expressões bem mais complexas do que a de um trinômio do segundo grau.

Para fazer essa análise, vamos usar o seguinte resultado:

Se em todos os pontos de um dado intervalo da reta uma expressão está bem definida e não se anula nesse intervalo então: ou ela é sempre positiva ou ela é sempre negativa nesse intervalo.

Muito cuidado ao usar esse resultado: é que ele só é verdadeiro para expressões que *variam continuamente em seus domínios de definição*, isto é, expressões *contínuas*.

Convenção: Salvo menção explícita em contrário, todas as expressões com as quais vamos trabalhar serão expressões que variam continuamente em seus domínios de definição e sobre as quais poderemos aplicar o resultado que acabamos de enunciar. O conceito de continuidade de uma expressão será desenvolvido no curso de Cálculo I.

Convenção feita não quer dizer que você nunca mais deve questionar a continuidade das expressões. **Você deve fazer isso sempre**. Veremos mais tarde algumas expressões que não variam continuamente. Para tais expressões, claro, não podemos aplicar o resultado sobre a variação de sinal que acabamos de enunciar.

Referências para o conceito e resultados gerais sobre continuidade você pode encontrar em [1, 5, 6, 7, 8].

Voltando a expressão $(x-1)(3-x)$ e aplicando tal resultado, concluímos que a expressão tem um único sinal à esquerda de $x = 1$.

Como descobrir esse sinal ?

Ora, avaliando a expressão em qualquer ponto à esquerda de 1, por exemplo, em $x = 0$, ou senão, em $x = -\pi$. Evidentemente, escolhemos um valor para a variável com o qual é mais simples fazer os cálculos. Com o mesmo processo descobriremos o sinal da expressão nos intervalos $(1, 3)$ e $(3, \infty)$.

Antes de seguirmos adiante, fixemos a seguinte notação para uma dada expressão $E(x)$:

O valor de $E(x)$ no ponto $x = a$ do seu domínio será denotado por $E(a)$ ou então por $E(x)\Big]_{x=a}$ ou então por $E(x)\big]_{x=a}$.

Assim,

☞ **Sinal em** $(-\infty, 1)$:
Avaliando a expressão em $x = 0 \in (-\infty, 1)$ temos:
$(x-1)(3-x)\,\big]_{x=0} = (0-1)(3-0) = -3 < 0 \;\; (-)$

☞ **Sinal em** $(1,3)$:
Avaliando a expressão em $x = 2 \in (1,3)$ temos:
$(x-1)(3-x)\big]_{x=2} = (2-1)(3-2) = 1 > 0 \ \ (+)$

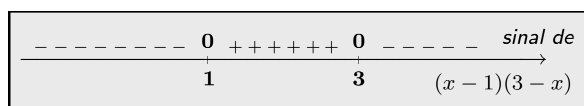
☞ **Sinal em** $(3,\infty)$:
Avaliando a expressão em $x = 4 \in (3,\infty)$ temos:
$(x-1)(3-x)\big]_{x=4} = (4-1)(3-4) = -3 < 0 \ \ (-)$.

Assim, $(x-1)(3-x)$ tem o seguinte quadro de sinais, exibido abaixo:

☞ é positiva em $(1,3)$;

☞ é negativa em $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$;

☞ se anula em $\mathcal{S} = \{1,3\}$.



Exemplo

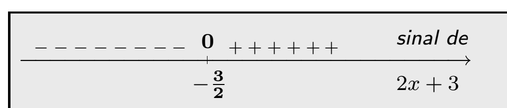
Para conhecer o sinal de $2x+3$ usando a técnica acima descrita, devemos:

☞ Resolver a equação: $2x+3=0$:
$2x+3=0 \iff x=-3/2$.

☞ Estudar o sinal de $2x+3$ em $(-\infty,-3/2)$ e $(-3/2,\infty)$.

Sinal em $(-\infty,-3/2)$:
Avaliando $2x+3$ em $-2 \in (-\infty,-3/2)$ temos:
$2x+3\big]_{x=-2} = 2(-2)+3 = -1 < 0 \ (-)$

Sinal em $(-3/2,\infty)$:
Avaliando $2x+3$ em $0 \in (-3/2,\infty)$ temos:
$2x+3\big]_{x=0} = 2\times 0+3 = 3 > 0 \ (+)$.



Assim,

☞ é positiva em $(-3/2,\infty)$;

☞ é negativa em $(-\infty,-3/2)$;

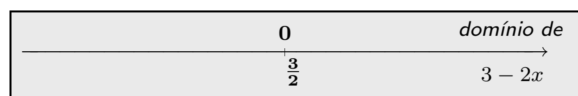
☞ se anula em $\mathcal{S} = \{-3/2\}$.

Exercícios resolvidos

1. **Estude o sinal da expressão $3-2x$.**

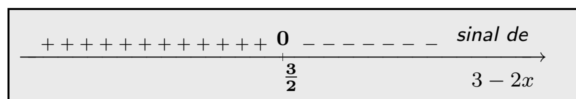
Solução Para isso precisamos:

☞ Resolver a equação $3-2x=0$:
$3-2x=0 \iff x=3/2$.



☞ Testar o sinal em $(-\infty\,,3/2\,)$:
Avaliando a expressão em $0 \in (-\infty\,,3/2\,)$ temos:
$3-2x\,\big]_{x=0} = 3-2\times 0 = 3 > 0\ (+)$

☞ Testar o sinal em $(\,3/2\,,\infty)$:
Avaliando a expressão em $2 \in (\,3/2\,,\infty)$ temos:
$3-2x\,\big]_{x=2} = 3-2\times 2 = -1 < 0\ (-)$



Agora, podemos concluir que a expressão $3-2x$ tem a seguinte distribuição de sinal:

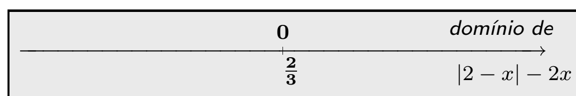
☞ é positiva em $(-\infty\,,3/2\,)$ ☞ é negativa em $(\,3/2\,,\infty)$ ☞ se anula em $x = 3/2$.

2. **Estude o sinal da expressão $|2-x|-2x$.**

Solução Para estudar o sinal dessa expressão precisamos:

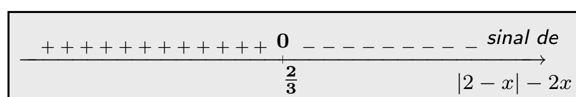
☞ Resolver a equação associada $|2-x|-2x = 0$.
Eliminando o módulo obtemos as equações:
$(2-x)-2x = 0 \quad ; \quad -(2-x)-2x = 0$.
Resolvendo-as:
(a) $(2-x)-2x = 0 \iff 2-3x = 0 \iff x = 2/3$;
(b) $-(2-x)-2x = 0 \iff -2-x = 0 \iff x = -2$.

Testando na equação inicial, verificamos que -2 não é raiz e que $2/3$ é raiz. Portanto, o conjunto solução da equação associada é $\mathcal{S} = \{2/3\}$.



☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,2/3\,)$:
Avaliando a expressão em $x = 0 \in (-\infty\,,2/3\,)$ temos:
$|2-x|-2x\,\big]_{x=0} = |2-0|-2\times 0 = 2 > 0\ \ (+)$

☞ Teste de sinal em $(\,2/3\,,\infty)$:
Avaliando a expressão em $x = 1 \in (\,2/3\,,\infty)$ temos:
$|2-x|-2x\,\big]_{x=1} = |2-1|-2 = 1-2$
$= -1 < 0\ \ (-)$



Finalizando, concluímos que $|2-x|-2x$ tem a seguinte distribuição de sinal:

☞ é positiva em $(-\infty\,,2/3\,)$ ☞ é negativa em $(\,2/3\,,\infty)$ ☞ se anula em $\mathcal{S} = \{2/3\}$.

3. **Estude o sinal da expressão x^2-2x-2 .**

Solução Para esse estudo precisamos:

☞ Resolver a equação associada $x^2 - 2x - 2 = 0$.
Para isso, completando quadrados, obtemos:

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \iff (x-1)^2 - 1 - 2 = 0 \iff (x-1)^2 = 3$$
$$\iff x - 1 = \pm\sqrt{3} \iff x = 1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Portanto, o conjunto solução da equação associada é $\mathcal{S} = \left\{1-\sqrt{3}\ ,\ 1+\sqrt{3}\right\}$.

	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	*domínio de*
	$\mathbf{1-\sqrt{3}}$	$\mathbf{1+\sqrt{3}}$	x^2-2x-2

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,, 1-\sqrt{3})$:
Em $x = -1 \in (-\infty\,, 1-\sqrt{3})$ temos:
$x^2 - 2x - 2\big]_{x=-1} = (-1)^2 - 2\times(-1) - 2 = 1 > 0\ \ (+)$

☞ Teste de sinal em $(\,1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\,)$:
Em $x = 0 \in (\,1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\,)$ temos:
$x^2 - 2x - 2\big]_{x=0} = 0^2 - 2\times 0 - 2$
$= -2 < 0\ \ (-)$

$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	$\mathbf{0}$	$-\,-\,-\,-\,-\,-$	$\mathbf{0}$	$+\,+\,+\,+\,+$	*sinal de*
	$\mathbf{1-\sqrt{3}}$		$\mathbf{1+\sqrt{3}}$		x^2-2x-2

☞ Teste de sinal em $(\,1+\sqrt{3}\,, \infty)$:
Em $x = 3 \in (\,1+\sqrt{3}\,, \infty)$ temos:
$x^2-2x-2\big]_{x=3} = 3^2-2\times3-2 = 1 > 0\ \ (+)$

Finalizando, concluímos que $x^2 - 2x - 2$ satisfaz:

- ☞ é positiva em $(-\infty\,, 1-\sqrt{3}\,) \cup (\,1+\sqrt{3}\,, \infty)$;
- ☞ é negativa em $(\,1-\sqrt{3}\,, 1+\sqrt{3}\,)$;
- ☞ se anula em $\mathcal{S} = \left\{1-\sqrt{3}\ ,\ 1+\sqrt{3}\right\}$.

4. **Estude o domínio e o sinal da expressão $\dfrac{4-x^2}{x}$.**

Solução Começamos esse estudo determinando onde a expressão está bem definida.

☞ A expressão só não está bem definida quando $x = 0$. Sendo assim, seu domínio é o conjunto $(-\infty\,, 0\,) \cup (\,0\,, \infty)$.

☞ A expressão se anula quando
$4 - x^2 = 0 \iff x = \pm 2$.

	$\mathbf{0}$	$\mathbf{nd}$	$\mathbf{0}$	*domínio de*
	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$(4-x^2)/x$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,, -2\,)$:
Em $x = -3 \in (-\infty\,, -2\,)$ temos:

$$\left.\frac{4-x^2}{x}\right]_{x=-3} = \frac{4-(-3)^2}{-3} = 5/3 > 0\ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(-2\,, 0\,)$:
Em $x = -1 \in (-2\,, 0\,)$ temos:

$$\left.\frac{4-x^2}{x}\right]_{x=-1} = \frac{4-(-1)^2}{-1} = -3 < 0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(\,0\,, 2\,)$:

Em $x = 1 \in (0\,,2)$ temos: $\left.\dfrac{4-x^2}{x}\right]_{x=1} = \dfrac{4-1^2}{1} = 3 > 0\ (+)$.

☞ Teste de sinal em $(2\,,\infty)$:
Em $x = 3 \in (2\,,\infty)$ temos:
$\left.\dfrac{4-x^2}{x}\right]_{x=2} = \dfrac{4-3^2}{3} = -5/3 < 0\ (-)$.
Finalizando, exibimos no quadro ao lado o sinal da expressão em estudo.

$+++++$ **0** $----$ **nd** $----$ **0** $++++$	*sinal de*
$\mathbf{-2}$ **0** **2**	$(4-x^2)/x$

5. **Determine o domínio da expressão $\sqrt{2+x-x^2}$.**

Solução Para isso, devemos determinar os valores da variável x para os quais a expressão

$$2+x-x^2 \geq 0\,. \tag{11.3}$$

Temos que:

☞ A expressão (11.3) se anula em
$$2+x-x^2 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times(-1)\times 2}}{2\times(-1)} = \frac{-1\pm 3}{-2} = \frac{1\mp 3}{2}$$
isto é, quando $x = -1$ ou quando $x = 2$.

☞ Teste do sinal de (11.3) em $(-\infty\,,-1)$:
Em $x = -2 \in (-\infty\,,-1)$ temos:
$2+x-x^2\,\big]_{x=-2} = 2+(-2)-(-2)^2 = -4 < 0\ (-)$

☞ Teste do sinal de (11.3) em $(-1\,,2)$:
Em $x = 0 \in (-1\,,2)$ temos:
$2+x-x^2\,\big]_{x=0} = 2+0-(0)^2 = 2 > 0\ (+)$

☞ Teste do sinal de (11.3) em $(2\,,\infty)$:
Em $x = 3 \in (2\,,\infty)$ temos:
$2+x-x^2\,\big]_{x=3} = 2+3-(3)^2 = -4 < 0\ (-)$

$--------$ **0** $++++++$ **0** $-----$	*sinal de*
$\mathbf{-1}$ **2**	$2+x-x^2$

Agora, podemos concluir que o domínio de definição da expressão $\sqrt{2+x-x^2}$ é o intervalo $(-1\,,2)$.

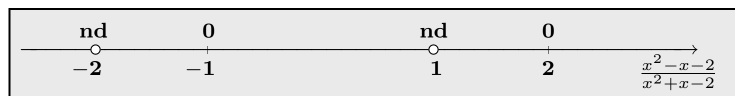
6. **Estude o sinal da expressão $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$.**

Solução Vejamos onde a expressão dada está bem definida. Para isso devemos resolver a equação:
$$x^2+x-2 = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = 1\,.$$
Assim, a expressão em questão só não está bem definida para $x \in \{-2\,,1\}$. Portanto, seu domínio de definição é o conjunto $(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,1)\cup(1\,,\infty)$.

Para determinar os pontos onde a expressão se anula, precisamos resolver:

$$x^2-x-2 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 2\,.$$

Logo, a expressão se anula, somente em $\{-1\,,2\}$. O domínio e os zeros da expressão são mostrados no diagrama abaixo.



☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-2\,)$:
Em $x=-3\in(-\infty\,,-2\,)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\Big]_{x=-3}=\frac{(-3)^2-(-3)-2}{(-3)^2+(-3)-2}=\frac{10}{4}>0\ (+)$

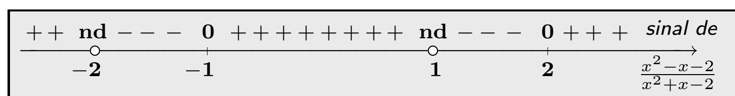
☞ Teste de sinal em $(-2\,,-1\,)$:
Em $x=-3/2\in(-2\,,-1\,)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\Big]_{x=-3/2}=\frac{(-3/2)^2-(-3/2)-2}{(-3/2)^2+(-3/2)-2}=-\frac{7/4}{5/4}<0\ (-)$

☞ Teste de sinal em $(-1\,,1\,)$:
Em $x=0\in(-1\,,1\,)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\Big]_{x=0}=\frac{0^2-0-2}{0^2+0-2}=1>0\ (+)$

☞ Teste de sinal em $(\,1\,,2\,)$:
Em $x=3/2\in(\,1\,,2\,)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\Big]_{x=3/2}=\frac{(3/2)^2-(3/2)-2}{(3/2)^2+(3/2)-2}=-\frac{5/4}{7/4}<0\ (-)$

☞ Teste de sinal em $(\,2\,,\infty)$:
Em $x=3\in(\,2\,,\infty)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\Big]_{x=3}=\frac{3^2-3-2}{3^2+3-2}=\frac{4}{10}>0\ (+)$.

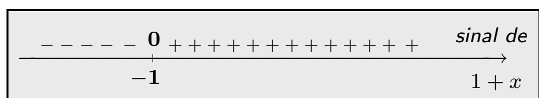
Finalizando o estudo do sinal da expressão, apresentamos o diagrama:



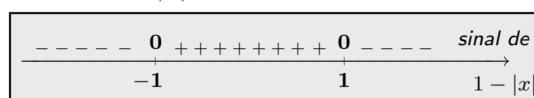
7. Estude o sinal da expressão $\dfrac{1+x}{1-|x|}$ e o seu domínio.

Solução Para estudar o sinal de uma expressão dada como quociente de duas outras basta estudar o sinal de cada uma delas e depois contruir o estudo do sinal da expressão quociente usando a regra de quociente de sinais.

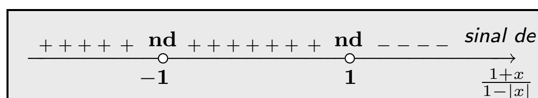
Sinal de $1+x$:



Sinal de $1-|x|$:



Compondo os sinais dos quadros acima, obtemos o sinal de $(1+x)/(1-|x|)$ mostrado no próximo quadro.



Note que o quociente se anula em $x=\pm1$. Logo, o domínio da expressão $(1+x)/(1-|x|)$ é $\mathbb{R}-\{\pm1\}$.

8. Estude o domínio e o sinal da expressão $|x|-\sqrt{4-x^2}$.

Solução A expressão só estará bem definida quando o radicando $4 - x^2$ for maior ou igual a zero, ou seja, quando $x \in [-2\,,2]$ como mostra o quadro de sinais da expressão $4 - x^2$ exibido ao lado. Assim, o domínio da expressão $|x| - \sqrt{4-x^2}$ é o intervalo $[-2\,,2]$.

$-\,-\,-\,-\,-$	**0** (-2)	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	**0** (2)	$-\,-\,-\,-$	*sinal de* $4-x^2$

Estudo do sinal de $|x| - \sqrt{4-x^2}$:

- Resolvendo a equação $|x| - \sqrt{4-x^2} = 0$:
  $|x| - \sqrt{4-x^2} = 0 \implies |x| = \sqrt{4-x^2} \implies x^2 = 4 - x^2 \implies x = \pm\sqrt{2}$.
  Testando esses valores, verificamos que são, de fato, as soluções de $|x| - \sqrt{4-x^2} = 0$.
  Portanto, a expressão $|x| - \sqrt{4-x^2}$ se anula somente em $x = \pm\sqrt{2} \in [-2\,,2]$.

- Teste de sinal[1] em $[-2\,,-\sqrt{2}\,)$:
  Em $x = -2 \in [-2\,,-\sqrt{2}\,)$ temos:
  $$|x| - \sqrt{4-x^2}\,\Big]_{x=-2} = |-2| - \sqrt{4-(-2)^2} = 2 > 0\ (+)$$

- Teste de sinal em $(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,)$:
  Em $x = 0 \in (-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,)$ temos:
  $$|x| - \sqrt{4-x^2}\,\Big]_{x=0} = |0| - \sqrt{4-0^2} = -2 < 0\ (-)$$

- Teste de sinal em $(-\sqrt{2}\,,2\,]$:
  Em $x = 2 \in (-\sqrt{2}\,,2\,]$ temos:
  $$|x| - \sqrt{4-x^2}\,\Big]_{x=0} = |2| - \sqrt{4-2^2} = 2 > 0\ (+)$$

O quadro a seguir mostra a variação do sinal de $|x| - \sqrt{4-x^2}$.

nd	(-2)	$+\,+\,+$	**0** ($-\sqrt{2}$)	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	**0** ($\sqrt{2}$)	$+\,+\,+$	(2)	**nd**	*sinal de* $\lvert x\rvert - \sqrt{4-x^2}$

Finalizando, concluímos que $|x| - \sqrt{4-x^2}$ satisfaz às seguintes condições:

- tem o intervalo $[-2\,,2]$ como domínio de definição;
- é positiva em $[-2\,,-\sqrt{2}\,) \cup (\,\sqrt{2}\,,2\,]$;
- é negativa em $(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,)$;
- se anula em $x = \pm\sqrt{2}$.

[1] Note que aqui testamos o sinal na extremidade do intervalo pois essa extremidade faz parte do domínio onde a expressão não se anula.

Exercícios

1. Estude o sinal das expressões a seguir.

(1) $1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$

(2) $x - \dfrac{x}{x-1}$

(3) $\dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$

(4) $1 - \dfrac{x^3 + x - 3}{x^3 - 27}$

(5) $\dfrac{x+1}{x^2-1} - x + \dfrac{1}{x-1}$

(6) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x\,(x+1)^2}{x^2 - x - 2} - \dfrac{1}{x^2}$

(7) $\dfrac{x+1}{|x^2-1|} - |x| + \dfrac{1}{x-1}$

(8) $|x+1| - \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

(9) $\dfrac{x}{4-x^2} + \dfrac{1}{x-2} - 1$

(10) $\dfrac{x^2+3x}{x+1} - \dfrac{x}{(x+1)^2} - 2x$.

(11) $\dfrac{x^2+2x+3}{x+3} - \dfrac{x}{x-1}$

(12) $\dfrac{x+1}{|x|} + \dfrac{1}{x^2 - |x|} - \dfrac{|x|}{3}$.

2. Estude o domínio e o sinal da expressão

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x-1}{2} - x - 1$$

3. Estude o domínio e o sinal das expressões a seguir.

(a) $\sqrt{2x^2 - 9} - x$
(b) $\sqrt{2x^2 - 9} - x^2$
(c) $\sqrt{x^2 - 3x} - 2x + 5$
(d) $\sqrt{3 - 2x} - 3 + \sqrt{2x + 2}$
(e) $\sqrt{x + 10} + \sqrt[4]{x + 10} - 2$

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$. Estude o domínio e o sinal da expressão:

$$2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}}$$

5. Estude o domínio e o sinal da expressão:

$$\sqrt{x^2 + x - 2} - x$$

6. Estude o domínio e o sinal da expressão:

$$\sqrt{2x^2 + x - 2} - x$$

7. Encontre o erro na argumentação dada abaixo.

Estudando o sinal da expressão $[x] - \frac{1}{2}$.

Temos que $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ e $[x] \in \mathbb{Z}$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Logo, $[x] - \frac{1}{2}$ nunca se anula.

Avaliando a expressão acima em $x = 1$ obtemos:

$[1] - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$.

conseqüentemente, a expressão $[x] - \frac{1}{2}$ é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$.

Onde está o erro ?

Note que a conclusão está errada pois ao avalir a expressão $[x] - \frac{1}{2}$ no ponto $x = 0$ obtemos o valor $-\frac{1}{2}$.

8. Considere a expressão

$$\sqrt[4]{x - \frac{x+2}{x-1}}\ .$$

(a) Determine o domínio de definição dessa expressão ;

(b) Determine os pontos onde essa expressão se anula.

9. Estude o sinal das expressões a seguir. Cuidado!!!!!

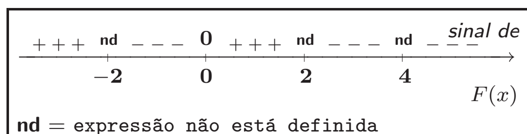
(a) $[x]$ (b) $[x] - x$
(c) $1 - [x]$ (d) $[x] + x$
(e) $[x] \times |x| - x$ (f) $[x] + 1/2$.

10. Uma expressão $F(x)$ tem como domínio de definição o conjunto $\mathbb{R} - \{-2\,,\,0\,,\,1\,,\,2\}$. Simplificando tal expressão, obtivemos:

$$\frac{(1-x)(2x+1)(x-2)(2x-3)}{(x+2)(1+x^2)(1-x)}\ .$$

(a) Analise o sinal da expressão inicial $F(x)$;
(b) Determine os pontos onde $F(x) \leq 0$.

11. Sobre uma determinada expressão $F(x)$ que varia continuamente obtivemos a seguinte informação sobre seu domínio e sua distribuição de sinais:



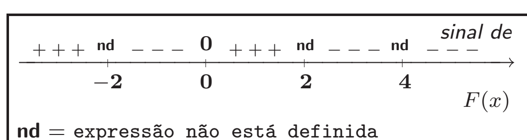
Com essas informações, determine os pontos onde $F(x)$ tem a seguinte propriedade:

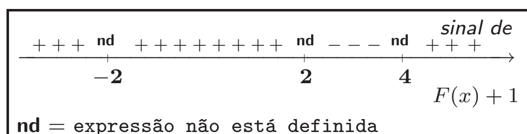
(1) $F(x) > 0$ (2) $2F(x) \leq 0$
(3) $xF(x) > 0$ (4) $(x^2 - 4)F(x) \geq 0$
(5) $(F(x))^3 > 0$ (6) $F(x-1) < 0$
(7) $\dfrac{F(x)}{x} \leq 0$ (8) $\dfrac{x^3-1}{F(x)} \geq 0$.

12. A informação dada no diagrama anterior sobre o sinal da expressão $F(x)$ dá a você elementos suficientes para resolver a equação $F(x) = 1$ ou pelo menos saber quantas soluções tem a equação $F(x) = 1$, ou quem sabe menos ainda, saber se a equação $F(x) = 1$ tem alguma solução ?

A resposta deve vir com uma *justificativa precisa* e essa justificativa precisa passa pela construção de exemplos.

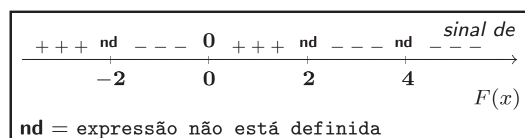
13. Os dois diagramas a seguir mostram a variação de sinal de uma expressão $F(x)$ e da expressão $F(x) + 1$.

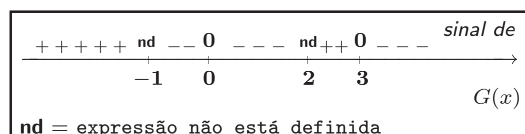




A partir desses dados o que podemos concluir sobre a expressão $F(x)$ nos intervalos $(-2\,,0)$ e $(4\,,\infty)$.

14. Analizando o sinal das expressões $F(x)$ e $G(x)$ obtivemos as seguintes informações:





(a) Qual o domínio de definição das expressões:
 (i) $F(x) - G(x)$ (ii) $F(x) \times G(x)$
 (iii) $\frac{F(x)}{xG(x)}$.
(b) Estude o sinal das espressões:
 (i) $F(x) \times G(x)$ (ii) $\frac{F(x)}{xG(x)}$.
(c) Resolva as inequações:
 (i) $F(x) \cdot G(x) \leq 0$ (ii) $\frac{F(x)}{xG(x)} \geq 0$.
(d) Você saberia dizer qual o sinal das expressões
 (i) $F(x) - 1$? (ii) $F(x) - G(x)$?
(e) Construa expressões $F(x)$ e $G(x)$ que tenham quadros de sinais como mostrado nesse exercício.

15. Se na expressão $F(x)$ do exercício anterior substituirmos x por $y+1$ obteremos uma expressão em y, a qual denotaremos por $A(y)$. Dê exemplos de expressões $F(x)$ e construa as correspondentes expressões $A(y)$ como acima definido.

Conhecido o sinal de $F(x)$, dado no exercício anterior,

(a) determine os pontos onde $A(y)$ não está bem definida ;
(b) resolva a equação $A(y) = 0$;
(c) determine os pontos onde $A(y) \geq 0$.

16. Repita o exercício anterior dando exemplos e respondendo os itens (a) , (b) e (c) agora trocando x por $y^2 - 2y - 3$.

17. Repita o exercício anterior trocando x por $1/y$.

18. Repita o exercício anterior trocando x por $1/y^2$.

19. Considere a expressão $F(x)$ dada no exercício 14.

(a) Resolva as equações:
(i) $F(y^2 - 1) = 0$
(ii) $F(y^2 - 1) \times F(y + 2) = 0$
(b) Estude o sinal e o domínio de definição de
(i) $F(y^2 - 1)$
(ii) $F(y^2 - 1) \times F(y + 2)$
(c) Determine os pontos onde
$F(y^2 - 1) \times F(y + 2) > 0$.

12

Resolução de inequações

Uma *inequação* é uma desigualdade na qual figura uma *incógnita*. *Resolver* uma inequação em $\mathbb{R}$ é encontrar os *valores reais da incógnita* que satisfazem a desigualdade. O conjunto formado por esses valores é chamado *conjunto solução da inequação* e será frequentemente denotado pela letra $\mathcal{S}$.

Como resolver a inequação $x^2 - 2x < 2$?

Passando o segundo membro para o primeiro (e trocando o sinal) a questão se resume a:

Como resolver a inequação $x^2 - 2x - 2 < 0$?

Para responder essa questão, basta saber onde a expressão $x^2 - 2x - 2$ é negativa. Mas isso é exatamente o que aprendemos fazer na seção anterior. Lá, fizemos um estudo do sinal da expressão $x^2 - 2x - 2$, exibido no quadro abaixo:

+ + + + + + + +	**0**	− − − − − −	**0**	+ + + + +	*sinal de*
	$\mathbf{1-\sqrt{3}}$		$\mathbf{1+\sqrt{3}}$		$x^2 - 2x - 2$

Concluímos então que:

$$x^2 - 2x - 2 < 0 \iff x \in (\,1 - \sqrt{3}\,, 1 + \sqrt{3}\,)\,.$$

Eqüivalentemente,

$$x^2 - 2x < 2 \iff x \in (\,1 - \sqrt{3}\,, 1 + \sqrt{3}\,)$$

resolvendo assim a inequação proposta.

De fato, feito o estudo do sinal de $x^2 - 2x - 2$ podemos concluir que:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 2 \leq 0 &\iff x \in [\,1 - \sqrt{3}\,, 1 + \sqrt{3}\,]\,; \\ x^2 - 2x - 2 > 0 &\iff x \in (-\infty\,, 1 - \sqrt{3}\,) \cup (\,1 + \sqrt{3}\,, \infty)\,; \\ x^2 - 2x - 2 \geq 0 &\iff x \in (-\infty\,, 1 - \sqrt{3}\,] \cup [\,1 + \sqrt{3}\,, \infty)\,. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} x^2-2x \leq 2 &\iff x \in [\,1-\sqrt{3}\,,1+\sqrt{3}\,] \\ x^2-2x > 2 &\iff x \in (-\infty\,,1-\sqrt{3}\,)\cup(\,1+\sqrt{3}\,,\infty) \\ x^2-2x \geq 2 &\iff x \in (-\infty\,,1-\sqrt{3}\,]\cup[\,1+\sqrt{3}\,,\infty)\,. \end{aligned}$$

Em resumo, para resolver uma inequação, seja lá qual for o sinal da desigualdade, devemos seguir os seguintes passos:

☞ **Passo 1:**
Passe o segundo membro para o primeiro (trocando o sinal) reduzindo assim a inequação dada a uma inequação com segundo membro nulo. O primeiro membro dessa nova inequação é dito *expressão associada a inequação*.

☞ **Passo 2:**
Determine o domínio da expressão associada a inequação.

☞ **Passo 3:**
Descubra onde a expressão associada a inequação se anula, isto é, resolva a *equação associada* a inequação.

☞ **Passo 4:**
Avalie a expressão associada a inequação nos pontos necessários para conhecer o seu sinal.

Exemplo

Para resolver a inequação $\dfrac{1-x}{x} \geq 0$ seguindo a proposta acima, precisamos conhecer o sinal de $\dfrac{1-x}{x}$.

Passemos então a análise do sinal da expressão $\dfrac{1-x}{x}$:

☞ A expressão acima só não está bem definida para $x=0$;

☞ A expressão só se anula quando $x=1$.

nd	0	*domínio de*
0	1	$(1-x)/x$

A expressão em questão varia continuamente em seu domínio de definição. Assim, para determinar seu sinal, façamos:

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,0\,)$:

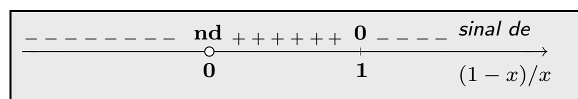
Em $x=-1 \in (-\infty\,,0\,)$ temos:

$$\left.\frac{1-x}{x}\right|_{x=-1} = \frac{1-(-1)}{-1} = -2 < 0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(\,0\,,1\,)$:

Em $x = 1/2 \in (\,0\,,1\,)$ temos:
$\left.\dfrac{1-x}{x}\right|_{x=\frac{1}{2}} = \dfrac{1-(1/2)}{1/2} = \dfrac{1/2}{1/2} = 1 > 0\ (+)$

☞ Teste de sinal em $(\,1\,,\infty)$:
Em $x = 2 \in (\,1\,,\infty)$ temos:
$\left.\dfrac{1-x}{x}\right|_{x=2} = \dfrac{1-2}{2} = -1/2 < 0\ (-)\,.$



Agora, de posse da análise de sinais podemos concluir que

$$\frac{1-x}{x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (\,0\,,1\,]\,.$$

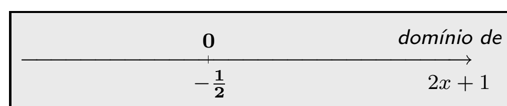
Exercícios resolvidos

1. **Resolva a inequação $2x+1<0$.**

Solução Para isso precisamos estudar o sinal da expressão associada a essa inequação, ou seja, da expressão $2x+1$ a qual varia continuamente em seu domínio de definição que é toda a reta.

Estudando o sinal de $2x+1$:

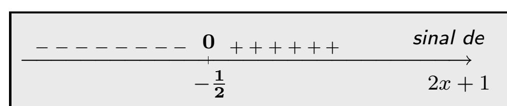
☞ Resolvendo a equação $2x+1=0$:
$2x+1=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-1/2\,.$
Portanto, a expressão associada se anula apenas em $x=-1/2$.



☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-1/2\,)$:
Em $x=-1 \in (-\infty\,,-1/2\,)$ temos:
$2x+1\big|_{x=-1} = 2\times(-1)+1 = -1 < 0\ (-).$

☞ Teste de sinal em $(-1/2\,,\infty)$:
Em $x = 0 \in (-1/2\,,\infty)$ temos:
$2x+1\big|_{x=0} = 2\times 0+1 = 1 > 0\ (+).$

Finalizando o estudo de sinais temos a tabela ao lado. Assim, concluímos:
$2x+1<0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty\,,-1/2\,)\,.$



☛ **Nota:** Fazendo o gráfico da expressão $2x+1$ poderíamos, facilmente, descobrir onde ela é negativa. No entanto, o objetivo desse exercício é exibir a aplicação da técnica que acabamos de aprender, numa situação bastante simples.

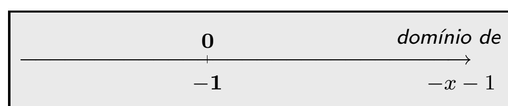
2. **Resolva a inequação $2-x \geq 3$.**

Solução Temos que: $2-x \geq 3 \iff 2-x-3 \geq 0$.

Nessa forma, a expressão associada a inequação é $2-x-3$, isto é, $-x-1$.

Estudando o sinal de $-x-1$:

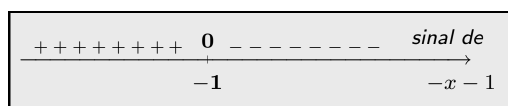
☞ Resolvendo a equação $-x-1=0$:
$-x-1=0 \iff x=-1$.
Portanto, a expressão associada se anula apena em $x=-1$.



☞ Teste de sinal em $(-\infty,-1)$:
Em $x=-2 \in (-\infty,-1)$ temos:
$-x-1\big|_{x=-2} = -(-2)-1 > 0$ (+).

☞ Teste de sinal em $(-1,\infty)$:
Em $x=0 \in (-1,\infty)$ temos:
$-x-1\big|_{x=0} = -0-1 = -1 < 0$ (−).

Finalizando o estudo de sinais temos a tabela ao lado. Assim, concluímos:
$2-x-3 \geq 0 \iff x \in (-\infty,-1]$.



Equivalentemente: $2-x \geq 3 \iff x \in (-\infty,-1]$.

3. **Resolva a inequação $x(4-x) \leq 3$.**

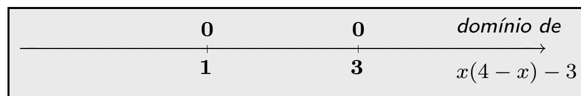
Solução Devemos então resolver a inequação $x(4-x)-3 \leq 0$. Para isso, temos que fazer o estudo do sinal da expressão associada: $x(4-x)-3$.

Estudando o sinal de $x(4-x)-3$:

☞ Resolvendo a equação $x(4-x)-3=0$:

$$\begin{aligned} x(4-x)-3=0 &\iff 4x-x^2-3=0 &&\iff x^2-4x+3=0 \\ &\iff (x-2)^2-4+3=0 &&\iff (x-2)^2=1 \\ &\iff x-2=\pm 1 &&\iff x=3 \text{ ou } x=1. \end{aligned}$$

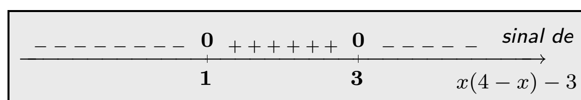
Portanto, o conjunto solução da equação associada é $\mathcal{S}=\{1,3\}$.



☞ Teste de sinal em $(-\infty,1)$:
Em $x=0 \in (-\infty,1)$ temos:
$x(4-x)-3\big|_{x=0} = 0\times(4-0)-3 = -3 < 0$ (−).

☞ Teste de sinal em $(1,3)$:
Em $x=2 \in (1,3)$ temos:
$x(4-x)-3\big|_{x=2} = 2\times(4-2)-3 = 1 > 0$ (+).

☞ Teste de sinal em $(3,\infty)$:
Em $x=4 \in (3,\infty)$ temos:
$x(4-x)-3\big|_{x=4} = 4\times(4-4)-3 = -3 < 0$ (−).



Feito o estudo dos sinais, concluímos: $x(4-x)-3 \leq 0 \iff x \in (-\infty\,,1\,] \cup [\,3\,,\infty)$.

Dito de outra forma,

$$x(4-x) \leq 3 \iff x \in (-\infty\,,1\,] \cup [\,3\,,\infty)\,.$$

4. **Resolva a inequação $x(2x-1)(2-x) > 0$.**

Solução Para isso, temos que fazer o estudo do sinal da expressão associada: $x(2x-1)(2-x)$.

Estudando o sinal de $x(2x-1)(2-x)$:

☞ Resolvendo a equação $x(2x-1)(2-x)=0$:
$x(2x-1)(2-x)=0 \iff x=0$ ou $x=1/2$ ou $x=2$.

Portanto, a equação associada só se anula em $\mathcal{S}=\{0\,,\,1/2\,,2\}$.

0	0	0	domínio de
0	1/2	2	$x(2x-1)(2-x)$

Estamos diante de uma expressão que varia continuamente. Assim, podemos estudar seu sinal, fazendo:

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,0\,)$:
Avaliando a expressão em $x=-1 \in (-\infty\,,0\,)$ temos:
$x(2x-1)(2-x)\big|_{x=-1} = (-1)(-2-1)(2-(-1)) = -(-3)\times 3 = 9 > 0 \;\; (+)$.

☞ Teste de sinal em $(\,0\,,\frac{1}{2}\,)$:
Avaliando a expressão em $x=\frac{1}{3} \in (\,0\,,\frac{1}{2}\,)$ temos:
$x(2x-1)(2-x)\big|_{x=1/3} = \frac{1}{3}(2\times\frac{1}{3}-1)(2-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\times(\frac{2}{3}-\frac{3}{3})(\frac{6}{3}-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{5}{3} = -\frac{5}{3} \;\; (-)$.

☞ Teste de sinal em $(\,\frac{1}{2}\,,2\,)$:
Em $x=1 \in (\,\frac{1}{2}\,,2\,)$ temos:
$x(2x-1)(2-x)\big|_{x=1} = 1\times(2-1)\times(2-1) = 1 \;\; (+)$.

☞ Teste de sinal em $(\,2\,,\infty)$:
Em $x=3 \in (\,2\,,\infty)$ temos:
$x(2x-1)(2-x)\big|_{x=3} = 3\times(2\times 3-1)\times(-1) = -15 \;\; (-)$.

Consequentemente, o conjunto solução da inequação inicial é $\mathcal{S}=(-\infty\,,0\,)\cup(\,\frac{1}{2}\,,2\,)$.

+ + + +	0	− −	0	+ + + + + +	0	− − − − −	sinal de
	0		$\frac{1}{2}$		2		$x(2x-1)(2-x)$

Ou seja: $x(2x-1)(2-x) > 0 \iff x \in (-\infty\,,0\,)\cup(\,\frac{1}{2}\,,2\,)$.

5. **Utilizando a técnica de análise de sinais de expressões, resolva a inequação $\dfrac{1}{x} > \dfrac{x+1}{x+2}$.**

Solução Temos que:

$$\frac{1}{x} > \frac{x+1}{x+2} \iff \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0\,.$$

Para resolver a inequação acima, passemos a análise de sinais da expressão

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2} \,. \tag{12.1}$$

☞ *Domínio da expressão*:

A expressão (12.6) só não está bem definida para $x = 0\,, -2$. Assim, o domínio dessa expressão é:

$$(-\infty\,, -2\,) \cup (-2\,, 0\,) \cup (\,0\,, \infty)$$

e o diagrama associado é mostrado a seguir.

nd (em -2), nd (em 0) — *domínio da expressão* $\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}$

☞ *Zeros da expressão*:

Simplificando a expressão (12.6) para $x \neq 0\,, -2$ obtemos:

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2}{x(x+2)} - \frac{x(x+1)}{x(x+2)} = \frac{x+2-x^2-x}{x(x+2)} = \frac{2-x^2}{x(x+2)} = \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{x(x+2)} \,.$$

Concluímos então que a expressão (12.6) se anula quando, e somente quando, $x = \pm\sqrt{2}$. Temos assim o seguinte quadro de informações sobre a expressão.

nd (em -2), 0 (em $-\sqrt{2}$), nd (em 0), 0 (em $\sqrt{2}$) — *Domínio e zeros de* $\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}$

☞ *Análise do sinal da expressão*:

A expressão (12.6) é uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição. Temos assim, a seguinte conclusão sobre seu sinal:

- Teste de sinal em $-3 \in (-\infty\,, -2)$:

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}\Big|_{x=-3} = -\frac{1}{3} - \frac{-3+1}{-3+2} = -\frac{1}{3} - 2 < 0 \;\; (-)$$

- Teste de sinal em $-\frac{3}{2} \in (-2\,, -\sqrt{2})$:

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}\Big|_{x=-3/2} = -\frac{1}{3/2} - \frac{-3/2+1}{-3/2+2} = -\frac{2}{3} + 1 > 0 \;\; (+)$$

- Teste de sinal em $-1 \in (-\sqrt{2}\,, 0)$:

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}\Big|_{x=-1} = -1 - \frac{-1+1}{-1+2} = -1 < 0 \;\; (-)$$

- Teste de sinal em $1 \in (\,0\,, \sqrt{2}\,)$:

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}\Big|_{x=1} = 1 - \frac{1+1}{1+2} = 1 - \frac{2}{3} > 0 \ \ (+)$$

• Teste de sinal em $2 \in (\sqrt{2}, \infty)$:

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}\Big|_{x=2} = \frac{1}{2} - \frac{2+1}{2+2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} < 0 \ \ (-) .$$

Temos assim, o seguinte quadro de sinais para a expressão (12.6):

−−	nd	+++	0	−−−−−	nd	+++++	0	−−−−−	sinal de
	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}$

Daí, concluímos que:

$$\frac{1}{x} > \frac{x+1}{x+2} \iff x \in (-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) .$$

6. Resolva a inequação $\dfrac{x^2-9}{1-|x|} \geq 0$.

Solução Para isso, vamos analizar o sinal da expressão $\dfrac{x^2-9}{1-|x|}$ a qual varia continuamente em seu domínio de definição.

Estudando o sinal de $\dfrac{x^2-9}{1-|x|}$:

☞ A expressão só não está bem definida para :
$1-|x| = 0 \iff |x| = 1 \iff x = \pm 1$.

☞ A expressão se anula quando :
$x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$.

☞ Teste de sinal em $(-\infty, -3)$:
Em $x = -4 \in (-\infty, -3)$ temos:
$$\frac{x^2-9}{1-|x|}\Big|_{x=-4} = \frac{(-4)^2-9}{1-|-4|} = -\frac{7}{3} < 0 \ \ (-).$$

0	nd	nd	0	sinal de
-3	-1	1	3	$(x^2-4)/(1-\lvert x\rvert)$

☞ Teste de sinal em $(-3, -1)$:
Em $x = -2 \in (-3, -1)$ temos:
$$\frac{x^2-9}{1-|x|}\Big|_{x=-2} = \frac{(-2)^2-9}{1-|-2|} = 5 > 0 \ \ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(-1, 1)$:
Em $x = 0 \in (-1, 1)$ temos:
$$\frac{x^2-9}{1-|x|}\Big|_{x=0} = \frac{0^2-9}{1-|0|} = -9 < 0 \ \ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(1, 3)$:
Em $x = 2 \in (1, 3)$ temos:
$$\frac{x^2-9}{1-|x|}\Big|_{x=2} = \frac{2^2-9}{1-|2|} = 5 > 0 \ \ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(3, \infty)$:
Em $x = 4 \in (3, \infty)$ temos:
$$\frac{x^2-9}{1-|x|}\Big|_{x=4} = \frac{4^2-9}{1-|4|} = -\frac{7}{3} < 0 \ \ (-) .$$

Finalizando o estudo do sinal:

− − −	0	+ + +	nd	− − −	nd	+ + +	0	− − −	*sinal de*
	-3		-1		1		3		$(x^2-4)/(1-\|x\|)$

Conclusão: $\dfrac{x^2-9}{1-|x|} \geq 0 \iff x \in [-3\,,-1\,) \cup (\,1\,,3\,]$.

7. **Resolva a inequação** $\dfrac{x^2-9}{1-|x|} < 0$ **.**

Solução Tendo em vista a análise de sinal feita no exercício anterior, concluímos que

$$\frac{x^2-9}{1-|x|} < 0 \iff x \in (-\infty\,,-3\,) \cup (-1\,,1\,) \cup (\,3\,,\infty)\,.$$

8. **Determine o domínio das expressões:**

(a) $\sqrt[3]{x^2-3}$ **(b)** $\sqrt{x^2-\dfrac{1}{x}}$ **.**

Solução Passemos à análise de cada uma delas.

(a) Nesse item o radicando x^2-3 (que está bem definido para todo número real) assume valores positivos, nulos e negativos. No entanto, o índice da raíz é três (ímpar) e, consequentemente, a raíz faz sentido qualquer que seja o sinal do radicando. Assim, o domínio da expressão é todo o conjunto dos números reais.

(b) Nesse item a raíz tem índice par (no caso, 2) e portanto a expressão só estará bem definida quando o radicando for maior ou igual a zero, i.e. quando

$$x^2 - \frac{1}{x} \geq 0\,. \tag{12.2}$$

Assim, o domínio da expressão do item (b) é o conjunto solução da inequação (12.2), cuja expressão associada é x^2-1/x . Trata-se de uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição.

Estudando o sinal de x^2-1/x :

☞ Essa expressão está bem definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

☞ Resolvendo a equação $x^2-1/x = 0$:

$$x^2 - \frac{1}{x} = 0 \iff x^2 - \frac{1}{x} = 0 \iff x^2 = \frac{1}{x} \iff x^3 = 1 \iff x = 1\,.$$

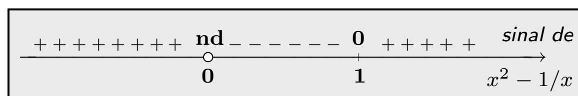
Portanto, a expressão x^2-1/x se anula apena em $x = 1$.

nd	0	*domínio de*
0	1	x^2-1/x

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,0)$:
Em $x=-1\in(-\infty\,,0)$ temos:
$x^2-\dfrac{1}{x}\Big|_{x=-1}=(-1)^2-1/(-1)=2>0\ (+)$.

☞ Teste de sinal em $(\,0\,,1\,)$:
Em $x=1/2\in(\,0\,,1\,)$ temos:
$x^2-\dfrac{1}{x}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(1/2)^2-\dfrac{1}{1/2}=\dfrac{1}{4}-2<0\ (-)$.

☞ Teste de sinal em $(\,1\,,\infty)$:
Em $x=2\in(\,1\,,\infty)$ temos:
$x^2-\dfrac{1}{x}\Big|_{x=2}=2^2-1/2>0\ (+)$.



Assim, concluímos: $x^2-1/x\geq 0 \iff x\in(-\infty\,,0\,)\cup[\,1\,,\infty)$. Consequentemente, o domínio da expressão

$$\sqrt{x^2-\frac{1}{x}} \quad \text{é o conjunto} \quad (-\infty\,,0\,)\cup[\,1\,,\infty)\,.$$

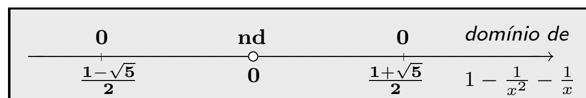
9. **Estude o sinal da expressão $1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$.**

Solução A expressão só não está bem definida para $x=0$. Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}-\{0\}$.

☞ Considere a equação associada $1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=0$.
Para $x\neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=0 &\iff \frac{x^2-1-x}{x^2}=0 \iff x^2-x-1=0\\ &\iff x^2-x-1=0 \iff \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{1}{4}-1=0\\ &\iff \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{5}{4} \iff x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\\ &\iff x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \iff x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\,.\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução da equação associada é $\mathcal{S}=\Big\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big\}$.



☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2})$:
Para $x=-1\in(-\infty\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ temos :
$1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\Big|_{x=-1}=1-\dfrac{1}{(-1)^2}-\dfrac{1}{(-1)}=1-1+1=1>0\ (+)$.

☞ Teste de sinal em $(\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\,)$:
Para $x=-\frac{1}{2}\in(\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\,)$ temos :
$1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\Big|_{x=-1/2}=1-\dfrac{1}{(-1/2)^2}-\dfrac{1}{(-1/2)}=1-4+2=-1<0\ (-)$.

☞ Teste de sinal em $(\,0\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,)$:

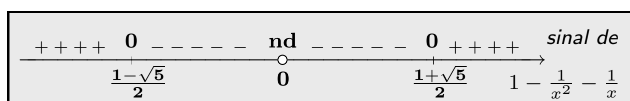
Para $x=1\in(\,0\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,)$ temos :

$1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1-1-1=-1<0\ (-)$.

☞ Teste de sinal em $(\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty)$:

Para $x=2\in(\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty)$ temos :

$1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\Big|_{x=2}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}>0\ (+)$.



Finalizando, podemos afirmar que $1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$:

☞ é positiva em $\left(-\infty\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\right)$;

☞ se anula em $\mathcal{S}=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\;,\;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$;

☞ é negativa em $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\right)\cup\left(0\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

10. Resolva a inequação $1-\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{x}$.

Solução Para resolver essa inequação devemos usar o estudo do sinal da expressão

$$1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

foi feito no exercício anterior. Assim, podemos responder:

$$1-\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{x}\iff 1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\leq 0\iff x\in\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\right)\cup\left(0\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

11. Utilizando a técnica de análise de sinais de expressões, resolva a inequação $\frac{2}{x-1}\leq\frac{x}{2-x}$.

Solução Para $x\neq 1$ e $x\neq 2$ temos que:

$$\frac{2}{x-1}\leq\frac{x}{2-x}\iff\frac{2}{x-1}-\frac{x}{2-x}\leq 0$$

Para resolver a inequação acima, passemos a análise de sinais da expressão

$$\frac{2}{x-1} - \frac{x}{2-x}\,. \tag{12.3}$$

☞ *Domínio da expressão*:

A expressão (12.3) só não está bem definida nos pontos 1 e 2. Assim, o domínio dessa expressão será o conjunto

$$(-\infty\,, 1\,) \cup (\,1\,, 2\,) \cup (\,2\,, \infty)\,.$$

nd	nd	*domínio da expressão*
$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\frac{2}{x-1} - \frac{x}{2-x}$

☞ *Zeros da expressão*:

Simplificando a expressão (12.3) para $x \in \mathbb{R} - \{1\,, 2\}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} - \frac{x}{2-x} &= \frac{2(2-x)}{(x-1)(2-x)} - \frac{x(x-1)}{(x-1)(2-x)} = \frac{2(2-x)-x(x-1)}{(x-1)(2-x)} \\ &= \frac{4-2x-x^2+x}{(x-1)(2-x)} = \frac{-x^2-x+4}{(x-1)(2-x)}\,. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Concluímos então que a expressão (12.3) se anula quando, e somente quando,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times(-1)\times 4}}{-2} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{-2} = \frac{-1\mp\sqrt{17}}{2}.$$

Temos assim o seguinte quadro de informações sobre a expressão (12.3).

0	nd	0	nd	*domínio e zeros de*
$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$	$\mathbf{1}$	$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$	$\mathbf{2}$	$\frac{2}{x-1} - \frac{x}{2-x}$

Note que $1 < \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} < 2$ já que:

$$1 < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} < 2 \iff 2 < -1+\sqrt{17} < 4 \iff 3 < \sqrt{17} < 5 \iff 9 < 17 < 25.$$

☞ *Análise do sinal da expressão*:

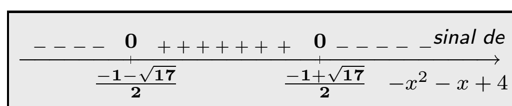
Para analizar o sinal da expressão (12.3) voltemos a igualdade

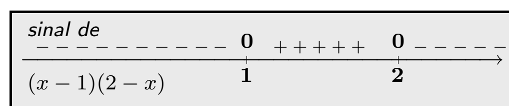
$$\frac{2}{x-1} - \frac{x}{2-x} = \frac{-x^2-x+4}{(x-1)(2-x)}$$

mostrada em (12.4). Assim, o sinal de (12.3) pode ser estudado através dos quadros de sinais das expressões

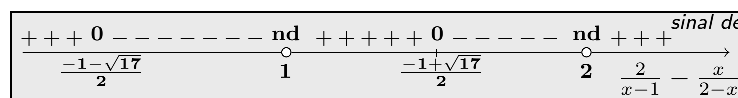
$$-x^2 - x + 4 \quad \text{e} \quad (x-1)(2-x) = -x^2 + 3x - 2$$

exibidos a seguir.





Como a expressão (12.3) é o quociente das duas expressões acima, obtemos o seguinte quadro de sinais:



Daí, concluímos que:

$$\frac{2}{x-1} \leq \frac{x}{2-x} \iff x \in \Big[-\frac{1+\sqrt{17}}{2}, 1\Big) \cup \Big[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2\Big).$$

12. Utilizando a técnica de análise de sinais de expressões, resolva a inequação $\boldsymbol{\dfrac{x^2+x+10}{x-1} < 2x}$ **.**

Solução Temos que

$$\frac{x^2+x+10}{x-1} < 2x \iff \frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x < 0\,.$$

Para resolver a inequação acima, passemos a análise de sinais da expressão

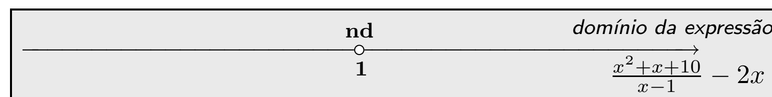
$$\frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x\,. \tag{12.5}$$

☞ *Domínio da expressão*:

A expressão (12.6) só não está bem definida para $x = 1$. Assim, o domínio dessa expressão é:

$$(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

e o diagrama associado é mostrado a seguir.



☞ *Zeros da expressão*:

Simplificando a expressão (12.6) para $x \neq 1$ obtemos:

$$\frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x = \frac{x^2+x+10-2x(x-1)}{x-1} = \frac{-x^2+3x+10}{x-1} = \frac{x^2-3x-10}{1-x}\,.$$

Por outro lado, sobre a expressão $x^2-3x-10$ temos que:

$$x^2-3x-10=0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\times(-10)}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{3\pm 7}{2}$$
$$\iff x=5 \quad \text{ou} \quad x=-2$$

que pertencem ao domínio da expressão (12.6).

Logo, a expressão (12.6) se anula quando, e somente quando, $x=5$ ou $x=-2$. Temos agora o seguinte quadro de informações sobre essa expressão:

	-2	1	5	
Domínio e zeros de $\frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x$	**0**	**nd**	**0**	

☞ *Análise do sinal da expressão*:

A expressão (12.6) é uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição. Temos assim, a seguinte conclusão sobre seu sinal:

- Teste de sinal em $-3 \in (-\infty\,,-2\,)$:
  $\left.\frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x\right]_{x=-3} = \frac{9-3+10}{-4} - 2(-3) = -4+6 > 0 \ \ (+)$
- Teste de sinal em $0 \in (-2\,,1\,)$:
  $\left.\frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x\right]_{x=0} = -10 < 0 \ \ (-)$
- Teste de sinal em $2 \in (\,1\,,5\,)$:
  $\left.\frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x\right]_{x=2} = 16-4 = 12 > 0 \ \ (+)$
- Teste de sinal em $6 \in (\,5\,,\infty)$:
  $\left.\frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x\right]_{x=6} = \frac{52}{5} - 12 < 0 \ \ (-)$

Temos assim, o seguinte quadro de sinais para a expressão (12.6):

		-2		1		5	
sinal de $\frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x$	+ + + + + + + + +	**0**	− − −	**nd**	+ + + + +	**0**	− − − − −

Daí, concluímos que:

$$\frac{x^2+x+10}{x-1} < 2x \iff \frac{x^2+x+10}{x-1} - 2x < 0 \iff x \in (-2\,,1\,) \cup (\,5\,,\infty)$$

o que finaliza a solução da questão.

13. **Utilizando a técnica de análise de sinais de expressões, resolva a inequação** $\dfrac{x-2}{x} \geq \dfrac{3}{3-2x}$**.**

Solução Temos que

$$\frac{x-2}{x} \geq \frac{3}{3-2x} \iff \frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x} \geq 0\,.$$

Para resolver a inequação acima, passemos a análise de sinais da expressão

$$\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x}\,. \tag{12.6}$$

☞*Domínio da expressão*:

A expressão (12.6) só não está bem definida quando $x = 0$ ou quando $x = 3/2$. Assim, o domínio dessa expressão é:

$$(-\infty\,,0\,) \cup (\,0\,,3/2\,) \cup (\,3/2\,,\infty)$$

e o diagrama associado é mostrado a seguir.

nd	nd	*domínio da expressão*
0	**3/2**	$\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x}$

☞ *Zeros da expressão*:

Simplificando a expressão (12.6) para $x \neq 0$ e $x \neq 3/2$ obtemos:

$$\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x} = \frac{(x-2)(3-2x)-3x}{x\,(3-2x)} = \frac{-2x^2+4x-6}{x\,(3-2x)} = -\frac{2\,(x^2-2x+3)}{x\,(3-2x)}\,.$$

Por outro lado, sobre o discriminante da expressão $x^2 - 2x + 3$ temos que:

$$\Delta = 4 - 4 \times 3 < 0\,.$$

Isso nos garante que $x^2 - 2x + 3$ nunca se anula.

Podemos então concluir que a expressão (12.6) nunca se anula em seu domínio de definição.

☞ *Análise do sinal da expressão*:

A expressão (12.6) é uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição. Temos assim, a seguinte conclusão sobre seu sinal:

- Teste de sinal em $-1 \in (-\infty\,,0\,)$:
  $\left.\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{3}{3-2x}\right]_{x=-1} = \dfrac{-3}{-1} - \dfrac{3}{3+2} = 3 - \dfrac{3}{5} > 0 \quad (+)$
- Teste de sinal em $1 \in (\,0\,,3/2\,)$:
  $\left.\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{3}{3-2x}\right]_{x=1} = -1 - \dfrac{3}{3-2} = -4 < 0 \quad (-)$

- Teste de sinal em $2 \in (3/2, \infty)$:

$$\left.\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x}\right]_{x=2} = -\frac{3}{3-4} = 3 > 0 \quad (+)$$

Temos assim, o seguinte quadro de sinais para a expressão (12.6):

+ + + + + + + +	**nd**	− − − − − − − −	**nd**	+ + + + + + + +	*sinal de*
	0		**3/2**		$\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x}$

Daí, concluímos que:

$$\frac{x-2}{x} \geq \frac{3}{3-2x} \iff \frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (3/2, \infty)$$

o que finaliza a solução da questão.

Exercícios

1. Use a análise de sinais de expressões do primeiro e do segundo graus para resolver as seguintes inequações:

(1) $2x - 4 \leq 5$ (2) $x^2 - 1 \geq 4$
(3) $y^2 + 5 \leq 4y$ (4) $y^2 < 18y - 77$
(5) $5 + 4x > x^2$ (6) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

2. Resolva as inequações:

(1) $y^4 < 18y^2 - 77$
(2) $x - \sqrt{x} \geq 4$

3. Use o estudo do sinal do trinômio do segundo grau para resolver as inequações.

(1) $2x^2 - x \leq 3$
(2) $x \leq x^2 - 1$
(3) $x - 2x^2 \geq 3x - 2$
(4) $x^2 - x^3 > 3x$
(5) $2x^2 + 3x > 4$.

4. Resolva a inequação $x^4 \geq 2x^2 + 2$.

5. Analize o sinal das expressões e resolva as inequações dadas:
(1) $|x-3| - 2$ e $|x-3| - 2 < 0$
(2) $|x-3| - |2|$ e $|x-3| > |2|$
(3) $|4+x| - x$ e $|4+x| > x$
(4) $|x-2| - |2x| + 2$ e $|x-2| \leq |2x| - 2$
(5) $|x+2| - |x| + 2$;
(6) $\big||x+8| - x\big|$ e $\big||x+8| - x\big| < 0$
(7) $\big||x+4| + |x|\big| - 3$ e $\big||x+4| + |x|\big| > 3$
(8) $\big||x-1| + x^2\big| - 1$ e $\big||x-1| + x^2\big| > 1$
(9) $x^2 + |x|$ e $x^2 + |x| > 0$
(10) $x^3 + |x|$ e $x^3 + |x| \leq 0$

6. Resolva as inequações:
(a) $x(2-x) < x$;
(b) $x(x+1) \leq x^2$;
(c) $(x-1)^2(4-x^2) \geq x - 1$;
(d) $x(x-1)(1+x^3) < x(1-x)$;
(e) $x^3(x^2-1) > x^2(x-1)$;
(f) $|x+1|(x^2-4) \geq (x^2-4)^2$;
(g) $(1-|x|)(x^2-1) \leq (|x|-1)^2$.

7. Quantas soluções inteiras as inequações do exercício anterior admitem ?

8. Analise o sinal de expressões associadas as inequações a seguir e resolva essas inequações:
(1) $1 - \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x}$
(2) $x \geq \dfrac{x}{x-1}$
(3) $\dfrac{x+2}{x^2-x-6} \leq 0$
(4) $1 \leq \dfrac{x^3+x-3}{x^3-27}$
(5) $\dfrac{x+1}{x^2-1} \leq x - \dfrac{1}{x-1}$
(6) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x\,(x+1)^2}{x^2-x-2} < \dfrac{1}{x^2}$
(7) $\dfrac{x+1}{|x^2-1|} \geq |x| - \dfrac{1}{x-1}$
(8) $|x+1| < \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.
(9) $\dfrac{x}{4-x^2} + \dfrac{1}{x-2} \leq 1$
(10) $\dfrac{x^2+3x}{x+1} - \dfrac{x}{(x+1)^2} > 2x$.
(11) $\dfrac{x^2+2x+3}{x+3} < \dfrac{x}{x-1}$
(12) $\dfrac{x+1}{|x|} + \dfrac{1}{x^2-|x|} \geq \dfrac{|x|}{3}$.

9. Use a análise feita no exercício anterior para resolver as inequações:
(1) $1 - \dfrac{2}{x^2} \leq \dfrac{1}{x}$
(2) $2x > \dfrac{8}{x-1}$
(3) $\dfrac{x+2}{x^2-x-6} \leq 0$

(4) $1 \leq \dfrac{x^3+x-3}{x^3-27}$
(5) $\dfrac{x+1}{x^2-1} \leq x - \dfrac{1}{x-1}$
(6) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x\,(x+1)^2}{x^2-x-2} < \dfrac{1}{x^2}$
(7) $\dfrac{x+1}{|x^2-1|} \geq |x| - \dfrac{1}{x-1}$
(8) $|x+1| < \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.
(9) $\dfrac{x}{4-x^2} + \dfrac{1}{x-2} \leq 1$
(10) $\dfrac{x^2+3x}{x+1} - \dfrac{x}{(x+1)^2} > 2x$.
(11) $\dfrac{x^2+2x+3}{x+3} < \dfrac{x}{x-1}$
(12) $\dfrac{x+1}{|x|} + \dfrac{1}{x^2-|x|} \geq \dfrac{|x|}{3}$.

10. Use o exercício anterior e resolva as inequações:
(a) $\sqrt{2x^2-9} \leq x$
(b) $\sqrt{2x^2-9} > x^2$
(c) $\sqrt{x^2-3x} \geq 2x-5$
(d) $\sqrt{3-2x} < 3 - \sqrt{2x+2}$
(e) $\sqrt{x+10} + \sqrt[4]{x+10} \leq 2$

11. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$. Resolva a inequação

$$2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} < \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$$

12. Resolva a equação

$$\sqrt{x-3} \geq 2 - \sqrt{8x+1}$$

13. Resolva a equação

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} \geq \sqrt{8x+1}$$

14. Resolva a inequação

$$\sqrt{x^2+x-2} \leq x$$

15. Resolva a inequação

$$\sqrt{2x^2+x-2} \leq x$$

16. Resolva a inequação

$$x-6 < \frac{18-15x}{x^2+2x-3} \leq x$$

17. Determine os pontos da reta cujo quadrado da sua distância ao ponto 1 é menor do que o dobro da distância ao ponto 3.

18. Determine os pontos da reta cujo quadrado, transladado de 5 é menor do que o triplo de sua distância ao ponto 1.

19. Determine os pontos da reta cuja raiz quadrada do seu transladado por 3 é maior do que a distância com a distância da raiz quadrada desse ponto ao ponto 1.

20. Em cada item determine os valores de x para os quais temos:

(a) $x \leq 2x-1 < |x|+1$
(b) $x+1 \geq x^2-2x \geq 1-3x^2$
(c) $\sqrt{x^2-x} > 2x-5 > x^2$

21. Deseja-se construir un triângulo com lados x, $x+1$ e $x+2$ onde $x \in (0, \infty)$. Pergunta-se: quais valores o parâmetro x não pode assumir ?

22. Use a técnica de completar quadrados para mostrar que:

(1) $x^3+x^2+x \geq 3x/4$ quando $x \geq 0$;
(2) $x^3+x^2+x \leq 3x/4$ quando $x \leq 0$.

23. Mostre que $(x^2-x+4)(x^2+4x+5) \geq 2$.

24. Mostre que a soma de um número real positivo com seu inverso não pode ser menor do que 2.

13

Equações e inequações com módulo

Aprendemos na Lição 10 uma técnica para resolver equações com módulo. Veremos na presente lição uma técnica mais eficiente para resolver tais equações. Ela se baseia no estudo de sinais de expressões. Como exemplo, resolvemos nessa lição, uma equação semelhante àquela proposta no exercício 8 da Lição 1.

Exemplo

Vamos resolver a equação $|x| + 1 = |x + 1|$.

Faremos isso, usando o estudo do sinal das parcelas x e $x + 1$, o qual é mostrado no quadro ao lado.

$- - - - - - - - \; \mathbf{0} \; + + + + + +$ *sinal de* x (ponto $\mathbf{0}$)

$- - - - \; \mathbf{0} \; + + + + + + + + +$ *sinal de* $x+1$ (ponto $\mathbf{-1}$)

Podemos então concluir:

- ☞ Para $x \in (-\infty\,, -1\,]$ a equação inicial tem a forma:
  $-x + 1 = -(x + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = -1\,.$
  Logo, a equação inicial não tem soluções nesse intervalo.
- ☞ Para $x \in [-1\,, 0\,]$ a equação inicial toma a forma:
  $-x + 1 = x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0\,.$
  Portanto, $x = 0 \in [-1\,, 0\,]$ é solução da equação inicial.
- ☞ Para $x \in [\,0\,, \infty)$ a equação inicial tem a forma:
  $x + 1 = x + 1\,.$
  Consequentemente, todo ponto do intervalo $[\,0\,, \infty)$ é solução da equação.

Finalizando, concluímos que o conjunto solução da equação inicial é: $\mathcal{S} = [\,0\,, \infty)\,.$

Exercícios resolvidos

1. **Resolva a equação $|x^2 - 1| + 2x = |2x + 1| - x^2$.**

Solução Para isso vamos usar as informações sobre o sinal das expressões $x^2 - 1$ e $2x+1$ exibidas no quadro ao lado. Agora, podemos concluir:

$- - - - - - - - - -$		**0**	$+ + + + + + +$		*sinal de*
		$-\frac{1}{2}$			$2x+1$
$+ + + + +$	**0**	$- - - -$	**0**	$+ + +$	*sinal de*
	-1		1		$x^2 - 1$

☞ Para $x \in (-\infty, -1]$ a equação inicial tem a forma:
$x^2 - 1 + 2x = -(2x+1) - x^2 \iff 2x^2 + 4x = 0 \iff 2x(x+2) = 0$.
Como $0 \notin (-\infty, -1]$, concluímos que a equação inicial tem apenas a solução $x = -2$ no intervalo $(-\infty, -1]$.

☞ Para $x \in [-1, -1/2]$ a equação inicial tem a forma:
$-(x^2 - 1) + 2x = -(2x+1) - x^2 \iff 4x = -2 \iff x = -1/2$.
Nesse caso temos apenas a solução $x = -1/2$ no intervalo $[-1, -1/2]$.

☞ Para $x \in [-1/2, 1]$ a equação inicial tem a forma:
$-(x^2 - 1) + 2x = 2x + 1 - x^2 \iff -x^2 + 1 + 2x = 2x + 1 - x^2$.
Segue daí que todos os pontos do intervalo $x \in [-1/2, 1]$ são soluções da equação.

☞ Para $x \in [1, \infty)$ a equação inicial tem a forma:
$x^2 - 1 + 2x = 2x + 1 - x^2 \iff 2x^2 = 2 \iff x^2 = 1$.
Como $-1 \notin [1, \infty)$ segue que a equação tem apenas a solução $x = 1$ no intervalo $[1, \infty)$.

Finalizando, concluímos que o conjunto solução é: $\mathcal{S} = \{-2\} \cup [-1/2, 1]$.

2. **Para cada número real x defina**

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x + 3 & \text{quando } x \geq -4 \\ |x| & \text{quando } x < -4 . \end{cases}$$

(a) Calcule $\langle -4 \rangle$, $\langle 2 \rangle$ e $\langle -5 \rangle$;

(b) Resolva a equação $\langle 2x \rangle = 6$.

Solução

(a) Segue da definição de $\langle x \rangle$ que:

- $\langle -4 \rangle = -4 + 3 = -1$ pois $-4 \geq -4$;
- $\langle 2 \rangle = 2 + 3 = 5$ pois $2 \geq -4$;
- $\langle -5 \rangle = |-5| = 5$ pois $-5 < -4$.

(b) Para resolver a equação $\langle 2x\rangle = 6$ devemos considerar dois casos.

Caso 1: $2x \geq -4 \iff x \geq -2$.
Nesse caso, a equação $\langle 2x\rangle = 6$ toma a forma:

$$2x + 3 = 6 \iff 2x = 3 \iff x = 3/2\,.$$

Assim, a única solução de $\langle 2x\rangle = 6$ em $[-2\,,\infty)$ é $3/2$.

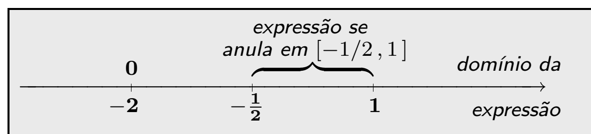
Caso 2: $2x < -4 \iff x < -2$.
Nesse caso, a equação $\langle 2x\rangle = 6$ toma a forma:

$$|2x| = 6 \iff |x| = 3 \iff x = \pm 3\,.$$

Logo, a única solução de $\langle 2x\rangle = 6$ em $(-\infty\,,-2)$ é -3.
Mostramos assim, que $\langle 2x\rangle = 6$ tem exatamente duas solução, a saber: $3/2$ e -3.

3. Estude o sinal da expressão $|x^2 - 1| + 2x - |2x + 1| + x^2$.

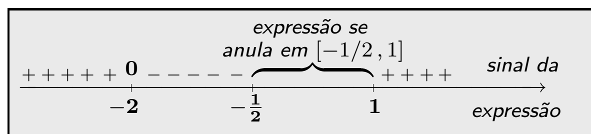
Solução No exercício anterior, resolvemos a equação $|x^2-1|+2x = |2x+1|-x^2$ que é, exatamente, a equação associada a expressão dada nesse exercício. Mostramos que o seu conjunto solução é $\mathcal{S} = \{-2\} \cup [-1/2\,,1\,]$.



A expressão em estudo varia continuamente em todo o seu domínio de definição que é toda a reta. Resta agora, fazer os testes de sinais nessa expressão para conhecer sua distribuição de sinais:

- ☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-2)$:
  Para $x = -3 \in (-\infty\,,-2)$ temos:
  $|x^2 - 1| + 2x - |2x + 1| + x^2\big|_{x=-3} = |9 - 1| - 6 - |-6 + 1| + 9 = 8 - 6 - 5 + 9 > 0\ (+)$.
- ☞ Teste de sinal em $(-2\,,-1/2\,)$:
  Para $x = -1 \in (-2\,,-1/2\,)$ temos:
  $|x^2 - 1| + 2x - |2x + 1| + x^2\big|_{x=-1} = |1 - 1| - 2 - |-2 + 1| + 1 = -2 - 1 + 1 < 0\ (-)$.
- ☞ Teste de sinal em $(\,1\,,\infty)$:
  Para $x = 2 \in (\,1\,,\infty)$ temos:
  $|x^2 - 1| + 2x - |2x + 1| + x^2\big|_{x=2} = |4 - 1| + 4 - |4 + 1| + 4 = 3 + 4 - 5 + 4 > 0\ (+)$.

A distribuição de sinais da expressão inicial $|x^2 - 1| + 2x - |2x + 1| + x^2$ é mostrado na figura ao lado.



Concluímos então que a expressão $|x^2 - 1| + 2x - |2x + 1| + x^2$

- ☛ é positiva em $(-\infty\,,-2\,) \cup (\,1\,,\infty)$;

- é negativa em $(-2\,,-1/2\,)$;
- se anula em $\{-2\} \cup [-1/2\,,1\,]$.

4. Use o exercício anterior para resolver a inequação $|x^2-1|+2x>|2x+1|-x^2$.

Solução Precisamos saber onde $|x^2-1|+2x-|2x+1|+x^2>0$ o que já foi feito no exercício anterior. Do quadro de sinais acima concluímos que

$$|x^2-1|+2x-|2x+1|+x^2>0 \iff x\in(-\infty\,,-2\,)\cup(\,1\,,\infty)$$

ou seja,

$$|x^2-1|+2x>|2x+1|-x^2 \iff x\in(-\infty\,,-2\,)\cup(\,1\,,\infty).$$

5. Utilizando a técnica de análise de sinais de expressões, resolva a inequação $|3-x|\le x|x|+5$.

Solução Para essa inequação, temos que:

$$|3-x|\le x|x|+5 \iff |3-x|-x|x|-5\le 0\,.$$

Como proposto no exercício, passemos a análise da expressão :

$$|3-x|-x|x|-5\,. \tag{13.1}$$

☞ *Domínio da expressão*:

A expressão (13.1) está bem definida para todo x real. Logo, seu domínio é toda a reta $\mathbb{R}$.

☞ *Zeros da expressão*:

Para resolver a equação

$$|3-x|-x|x|-5=0 \tag{13.2}$$

usaremos os quadros de sinais de $3-x$ e x mostrados a seguir.

+ + + + + + + + + + + +	**0**	− − − − − −	*sinal de*
	3		$3-x$

− − − −	**0**	+ + + + + + + + + + +	*sinal de*
	0		x

Temos assim, três casos a considerar.

Caso 1: $x\in(-\infty\,,0\,]$.

Nesse caso a equação (13.2) toma a forma:

$$3 - x - x(-x) - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$

cujas soluções são

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \,. \end{cases}$$

Como $2 \notin (-\infty\,,0\,]$ concluímos que (13.2) tem apenas uma solução em $(-\infty\,,0\,]$, a saber: $x = -1$.

Caso 2: $x \in [\,0\,,3\,]$.
Nesse caso a equação (13.2) tem a forma:

$$3 - x - x^2 - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -x^2 - x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x + 2 = 0\,.$$

Segue daí que a equação (13.2) não tem soluções (reais) em $[\,0\,,3\,]$ já que o discriminante de x^2+x+2 vale $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 2$ que é negativo.

Caso 3: $x \in [\,3\,,\infty)$.
Nesse caso a equação (13.2) tem a forma:

$$-(3 - x) - x^2 - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -x^2 + x - 8 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x + 8 = 0\,.$$

Novamente, a equação (13.2) não tem soluções (reais) em $[\,3\,,\infty)$ já que o discriminante de $x^2 - x + 8$ vale $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 8$ que é negativo.
Concluímos então que a equação (13.2) tem uma única solução, qual seja, $x = -1$.

☞ *Análise do sinal da expressão*:

A expressão (13.1) é uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição. Temos então a seguinte conclusão sobre seu quadro de sinais.

• Teste de sinal em $-2 \in (-\infty\,,-1)$:

$$|3 - x| - x|x| - 5\Big]_{x=-2} = |3 - (-2)| - (-2)| - 2| - 5 = 5 + 4 - 5 > 0 \ (+)$$

• Teste de sinal em $0 \in (-1\,,\infty)$:

$$|3 - x| - x|x| - 5\Big]_{x=0} = |3| - (-2)|0| - 5 = 3 - 5 < 0 \ (-)\,.$$

Finalizando, temos o seguinte quadro de sinais para a expresssão $|3 - x| - x|x| - 5$:

$+ + + + + + + + + + + +$ **0** $- - - - - - - - - - -$ *sinal de*

$\mathbf{-1}$ $|3-x| - x|x| - 5$

Agora, podemos garantir que

$$|3 - x| \leq x|x| + 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-1\,,\infty)\,.$$

6. **Resolva a inequação $|2x+1|+|x-2|>x$.**

Solução Começamos, resolvendo a equação associada $|2x+1|+|x-2|=x$. Para isso, vamos usar a distribuição de sinais das expressões $2x-1$ e $x-2$ para eliminar o módulo e resolver a equação.
Da tabela de sinais ao lado concluímos que:

− − − − − − − − − − − **0** + + + + +	sinal de $x-2$
2	
− − − − − **0** + + + + + + + + + +	sinal de $2x+1$
$-1/2$	

☞ Para $x\in(-\infty\,,-1/2\,]$ a equação associada $|2x+1|+|x-2|-x=0$ toma a forma:
$-(2x+1)-(x-2)-x=0 \iff 4x=1$.
Como $1/4\notin(-\infty\,,-1/2\,]$ segue que essa equação não tem soluções em $(-\infty\,,-1/2\,]$.

☞ Para $x\in[-1/2\,,2\,]$ a equação associada toma a forma:
$2x+1-(x-2)-x=0 \iff 3=0$ ou seja, a equação não tem soluções em $[-1/2\,,2\,]$.

☞ Para $x\in[\,2\,,\infty)$ a equação associada toma a forma:
$2x+1+x-2-x=0 \iff 2x=1$.
Novamente, a equação $2x+1+x-2-x=0$ não tem soluções em $[\,2\,,\infty)$.

Portanto, $|2x+1|+|x-2|-x$ nunca se anula. Para conhecer o seu quadro de sinais, basta avaliá-la em $x=0$ já que trata-se de uma expressão que varia continuamente em toda a reta. Nesse caso temos:
$|2x+1|+|x-2|-x\big|_{x=0}=|2\times 0+1|+|0-2|-0=3>\ (+)$.
Consequentemente,

$$|2x+1|+|x-2|-x>0 \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

Dito de outra forma,

$$|2x+1|+|x-2|>x \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

7. **Usando a técnica de análise de sinais de expressões, resolva a inequação $|2x+1|-|1-3x|>6x$.**

Solução Para cada $x\in\mathbb{R}$ temos que:

$$|2x+1|-|1-3x|>6x \iff |2x+1|-|1-3x|-6x>0\,.$$

Passemos então a análise da expressão

$$|2x+1|-|1-3x|-6x\,. \qquad (13.3)$$

☞ *Domínio da expressão*:

A expresssão (13.3) está bem definida para todo x real. Logo, seu domínio é toda a reta $\mathbb{R}$.

☞ *Zeros da expressão*:

Passemos a resolução da equação

$$|2x+1|-|1-3x|-6x=0\,. \qquad (13.4)$$

Para isso vamos usar o quadro de sinais das expressões $2x+1$ e $1-3x$ mostrados a seguir.

$- - - -$ **0** $+ + + + + + + + + + +$	$-\frac{1}{2}$	*sinal de* $2x+1$
$+ + + + + + + + + + + +$ **0** $- - - - - -$	$\frac{1}{3}$	*sinal de* $1-3x$

Temos então, três casos a considerar.

Caso 1: $x \in (-\infty\,,-1/2\,]$.

Nesse caso a equação (13.4) toma a forma:

$$\begin{aligned} -(2x+1)-(1-3x)-6x=0 &\iff -2x-1-1+3x-6x=0 \\ &\iff -2=5x \iff x=-2/5\,. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que: $-2/5 > -1/2$ já que

$$-\frac{2}{5} > -\frac{1}{2} \iff \frac{2}{5} < \frac{1}{2} \iff 4 < 5\,.$$

Concluímos assim que a equação (13.4) não tem soluções no intervalo $(-\infty\,,-1/2\,]$.

Caso 2: $x \in [-1/2\,,1/3\,]$.

Nesse caso a equação (13.4) tem a forma:

$$2x+1-(1-3x)-6x=0 \iff 2x+1-1+3x-6x=0 \iff x=0\,.$$

Nesse caso, $0 \in [-1/2\,,1/3\,]$ e consequentemente, $x=0$ é solução de (13.4).

Caso 3: $x \in [\,1/3\,,\infty)$.

Nesse caso a equação (13.4) adquire a forma:

$$\begin{aligned} 2x+1-[-(1-3x)]-6x=0 &\iff 2x+1+1-3x-6x=0 \\ &\iff 2=7x \iff x=2/7\,. \end{aligned}$$

Além disso, temos que $2/7 < 1/3$ já que

$$\frac{2}{7} < \frac{1}{3} \iff 6 < 7.$$

Logo, a equação (13.4) não tem soluções em $[\,1/3\,,\infty)$.

Concluímos então que a equação (13.4) tem uma única solução, qual seja, $x=0$.

☞ *Análise do sinal da expressão*:

A expressão (13.3) é uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição. Temos então a seguinte conclusão sobre seu quadro de sinais.

- Teste de sinal em $-1 \in (-\infty\,,0)$:

$|2x+1|-|1-3x|-6x\,\Big]_{x=-1} = |2\times(-1)+1|-|1-3\times(-1)|-6\times(-1) > 0 \;\; (+)$

- Teste de sinal em $1 \in (\,0\,,\infty)$:

$|2x+1|-|1-3x|-6x\,\Big]_{x=1} = |2\times 1+1|-|1-3\times 1|-6\times 1 < 0 \;\; (-)\,.$

Finalizando, temos o seguinte quadro de sinais para a expresssão $|2x+1|-|1-3x|-6x$:

+ + + + + + + + + + + +	**0**	− − − − − − − − − − −	*sinal de*
	0		$\lvert 2x+1\rvert-\lvert 1-3x\rvert-6x$

Agora, podemos garantir que

$$|2x+1|-|1-3x| > 6x \quad\Longleftrightarrow\quad x \in (-\infty\,,0\,).$$

8. **Considere a expressão $2-|x-2x^2|$.**

   (a) Esboce o seu gráfico ;

   (b) Determine o *maior* **e o** *menor* **valor que essa expressão assume no intervalo $[-1\,,1\,]$.**

Solução

(a) Para esboçar o gráfico dessa expressão vamos estudar o sinal de $x-2x^2$ afim de eliminarmos o módulo.

Temos que:

$$x-2x^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x(1-2x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=0 \quad \text{ou} \quad x=1/2\,.$$

Como o coeficiente do termo do segundo grau na expressão $x-2x^2$ é negativo, resulta que a distribuição de sinais dessa expressão é o exibido na figura ao lado.

− − − − −	**0**	+ + + + + +	**0**	− − − − −	*sinal de*
	0		**1/2**		$x-2x^2$

Passemos agora a análise dos seguintes casos.

Caso 1: $x \in (-\infty\,,0\,] \cup [\,1/2\,,\infty\,)$.

Nesse caso a expressão $2-|x-2x^2|$ toma a forma:

$$\begin{aligned} 2-|x-2x^2| &= 2+(x-2x^2) = -2x^2+x+2 = -(2x^2-x-2) \\ &= -\Big[2\Big(x-\frac{1}{4}\Big)^2-\frac{1}{8}-2\Big] = -2\Big(x-\frac{1}{4}\Big)^2+\frac{17}{8}\,. \end{aligned} \qquad (13.5)$$

Sabemos que o gráfico da expressão em (13.5) é o da parábola que

- tem a reta de equação $x = 1/4$ como eixo de simetria ;
- assume $17/8$ como seu maior valor ;
- e se anula em

$$-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}=0 \iff \left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{17}{16} \iff x-\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4} \iff x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

Conseqüentemente, o gráfico da expressão $2-|x-2x^2|$ coincide com a parábola acima descrita no conjunto $(-\infty\,,0]\cup[\,1/2\,,\infty\,)$.

Note que 0 e $1/2$ são simétricos em relação à $1/4$. Além disso, temos que

$$\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\in(-\infty\,,0\,]\cup[\,1/2\,,\infty\,)\,.$$

Caso 2: $x\in[\,0\,,1/2\,]$.

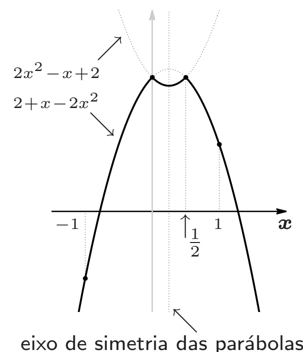
Nesse caso a expressão $2-|x-2x^2|$ toma a forma:

$$\begin{aligned}2-|x-2x^2| &= 2-x+2x^2=2x^2-x+2=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+2\\ &= 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\,. \qquad (13.6)\end{aligned}$$

Sabemos que o gráfico da expressão em (13.6) no intervalo $[\,0\,,1/2\,]$ coincide com a parábola que

- tem a reta de equação $x = 1/4$ como eixo de simetria ;
- assume $15/8$ como seu menor valor ;
- e nunca se anula.

Na figura abaixo o gráfico esboçado em linha contínua é o gráfico da expressão em estudo, enquanto que em linha pontilhada são mostradas as partes restantes das parábolas que usamos para compor o gráfico da expressão $2-|x-2x^2|$.



(b) Para responder o item (b) basta observa o gráfico acima.

- O maior valor é assumido na origem e no ponto $1/2$ e vale 2 já que: $2+x-2x^2\,\big]_{x=0}=2=2+x-2x^2\,\big]_{x=1/2}$
- O menor valor é assumido em -1 e vale $2+x-2x^2\,\big]_{x=-1}=2-1-2=-1$.

9. Considere a expressão $2|x-1|-(x-1)^2$.

(a) Esboce o seu gráfico ;

(b) Determine o *maior* e o *menor* valor que essa expressão assume no intervalo $[-1\,,3\,]$ e em quais pontos desse intervalo esses valores são assumidos.

Solução

(a) Para esboçar o gráfico dessa expressão vamos estudar o sinal de $x-1$ que é de fácil descrição:

- $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1\,;$
- $x-1 \leq 0 \iff x \leq 1\,;$

Passemos então a análise dos seguintes casos.

Caso 1: $x \geq 1\,.$
Nesse caso a expressão $2|x-1|-(x-1)^2$ toma a forma:

$$2|x-1|-(x-1)^2 = 2(x-1)-(x-1)^2 = (x-1)[2-(x-1)] = (x-1)(3-x)\,. \qquad (13.7)$$

Sabemos que o gráfico da expressão em (13.7) é o da parábola que

- tem coeficiente do termo de segundo grau negativo ;
- se anula em $x=1$ e em $x=3\,;$
- tem a reta de equação $x=2$ como eixo[1] de simetria ;
- assume seu maior valor em $x=2$ e tal valor é $1\,.$

Assim, o gráfico da expressão $2|x-1|-(x-1)^2$ coincide com a parábola acima descrita em $[\,1\,,\infty\,)\,.$

Caso 2: $x \leq 1\,.$
Nesse caso a expressão $2|x-1|-(x-1)^2$ toma a forma:

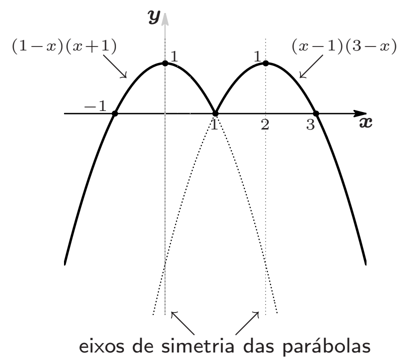
$$2|x-1|-(x-1)^2 = -2(x-1)-(x-1)^2 = -(x-1)(2+x-1) = -(x-1)(x+1)\,. \qquad (13.8)$$

Sabemos que o gráfico da expressão (13.8) é o da parábola que

- tem coeficiente do termo de segundo grau negativo ;
- se anula em $x=1$ e em $x=-1\,;$
- tem a reta de equação $x=0$ como eixo de simetria ;
- assume seu maior valor em $x=0$ e tal valor é $1\,.$

Na figura a seguir, superpomos as duas parábolas. O gráfico esboçado em linha contínua é o gráfico da expressão em estudo, enquanto que em linha pontilhada são mostradas as partes restantes das parábolas que usamos para compor o gráfico da expressão $2|x-1|-(x-1)^2\,.$

[1]Lembrese que as raízes são simétrica em relação ao eixo de simetria.



(b) Para responder o item (b) basta observa o gráfico acima.

- O maior valor é assumido na origem e no ponto 2 e vale 1 já que: $2|x-1|-(x-1)^2\big|_{x=0} = 1 = 2|x-1|-(x-1)^2\big|_{x=2}$
- O menor valor é assumido nos pontos -1 , 1 e 3 e vale zero.

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações:

(a) $|x-1|-x=|2x+1|$
(b) $x^2-2|x-1|=2$
(c) $|x^2-2x|=2x+1$
(d) $|x^2-3x-1|=|1-2x|+1$
(e) $\big||2x-|x-1|\big|+x^2=1$
(f) $1-\big|x^2-|2x-1|\big|=3|x|$.

2. Resolva as seguintes inequações:

(a) $|x-1|-x<|2x+1|$
(b) $x^2-2|x-1|>2$
(c) $|x^2-2x|\le 2x+1$
(d) $|x^2-3x-1|\ge|1-2x|+1$
(e) $\big||2x-|x-1|\big|+x^2<1$
(f) $1-\big|x^2-|2x-1|\big|>3|x|$.

3. Faça o gráfico de cada uma das expressões:

(a) $|x-1|-x-|2x+1|$
(b) $x^2-2|x-1|-2$
(c) $|x^2-2x|-2x-1$
(d) $|x^2-3x-1|-|1-2x|-1$
(e) $\big||2x-|x-1|\big|+x^2-1$
(f) $1-\big|x^2-|2x-1|\big|-3|x|$.

4. Resolva as seguintes equações:

(a) $\dfrac{1}{|x-2|}+|1-2x|=1$
(b) $\dfrac{2-|x|}{x^2-2|x-4|}=2$
(c) $\dfrac{1}{|x^2-2x|}=\dfrac{1}{2x+1}$
(d) $\dfrac{x}{|x^2-3x-1|}=\dfrac{1}{|1-2x|+1}$
(e) $\dfrac{2-|x|}{x^2-2|x-4|}=\dfrac{2}{x+2}$
(f) $\dfrac{\sqrt{|1-x^2|}}{1-|x|}=2$.

5. Resolva as inequações a seguir usando a técnica de análise de sinais. Nos itens abaixo as expressões associadas às inequações, variam continuamente em seus respectivos domínios de definição.

(a) $\dfrac{1}{|x-2|}+|1-2x|<1$
(b) $\dfrac{2-|x|}{x^2-2|x-4|}>2$
(c) $\dfrac{1}{|x^2-2x|}\le\dfrac{1}{2x+1}$
(d) $\dfrac{x}{|x^2-3x-1|}\ge\dfrac{1}{|1-2x|+1}$
(e) $\dfrac{2-|x|}{x^2-2|x-4|}<\dfrac{2}{x+2}$
(f) $\dfrac{\sqrt{|1-x^2|}}{1-|x|}>2$.

6. Determine o domínio da expressão $E(x)$ e os pontos onde ela se anula:

$$E(x):=\sqrt{\frac{x^2-|x|-2}{2-|x-2|}}-1$$

7. A expressão definida no exercício anterior varia continuamente em todo o seu domínio de definição. Dê a distribuição de sinais dessa expressão.

8. Esboce o gráfico da expressão $E(x)$ definida por:

$$E(x):=\begin{cases}2x+1 & \text{quando } x\ge 0\\ 1 & \text{quando } x\le 0\,.\end{cases}$$

9. Esboce o gráfico de

$$E(x):=\begin{cases}1-x^2 & \text{quando } x\le 1\\ x+1 & \text{quando } x\le 0\,.\end{cases}$$

10. Considere a expressão

$$E(x):=\begin{cases}1-x^2 & \text{quando } x\le 1\\ x+1 & \text{quando } x> 1\,.\end{cases}$$

(a) Calcule $E(-1)$, $E(0)$, $E(1)$, $E(2)$;
(b) Esboce o gráfico dessa expressão.

11. Considere a expressão

$$E(x):=\begin{cases}x^2-2x & \text{quando } x\le 2\\ 2-x & \text{quando } x\ge 2\,.\end{cases}$$

(a) Calcule $E(-1)$, $E(0)$, $E(1)$, $E(2)$;
(b) Esboce o gráfico dessa expressão.

14

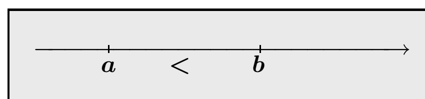
Relação de ordem

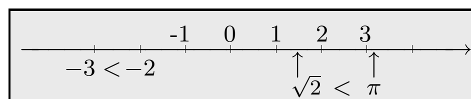
Na Lição 2 introduzimos as noções de desigualdades e de estimativas quando tratamos da representação dos números reais na reta. Fizemos isso na seção 3 dessa lição e lá apresentamos algumas definições e propriedades que relembraremos aqui.

Definição: Sejam a e b dois números reais, vistos como pontos da reta orientada.

- Dizemos que a *é menor que do que* b, e escrevemos $\boldsymbol{a < b}$, quando a está à esquerda de b na reta orientada;
- Dizemos que a *é maior que do que* b, e escrevemos $\boldsymbol{a > b}$, quando a está à direita de b na reta orientada.

Segue imediatamente da definição acima que: $a > b \iff b < a$.





Para indicar que a é *menor ou igual à* b escrevemos: $a \leq b$. Analogamente, escrevemos $a \geq b$ para indicar que a é *maior ou igual à* b.

Dizemos que $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ e $a \geq b$ são *desigualdades* e que as relações "$<$" e "$>$" são *relações de ordem*.

Quando um número real c é, simultaneamente, *maior do que* a **e** *menor do que* b escrevemos:

$$\boldsymbol{a < c < b} \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad \boldsymbol{b > c > a\,.}$$

Uma tal desigualdade é uma *estimativa* para o valor de c. Dizemos também que a e b são *aproximações* para c: a é uma aproximação para c por *valores menores* (ou por *falta*) e b é uma aproximação por *valores maiores* (ou por *excesso*).

Nesse sentido, as extremidades de intervalos limitados da reta são estimativas para os pontos do intervalo. Por definição temos:

$$a \in (3, 4) \iff 3 < a < 4 .$$

Quando temos uma desigualdade do tipo $a < b$ ou $a \leq b$ dizemos que:

- b é uma *majoração para* a ou que b é uma *cota superior para* a;
- a é uma *minoração para* b ou que a é uma *cota inferior para* b.

Exemplos

- ❄ $\sqrt{2} < 2$
- ❄ $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
- ❄ $-\sqrt{2} > -2$
- ❄ $3 < \pi < 4$
- ❄ $-4 < -\pi < -3$
- ❄ $3{,}1 < \pi < 3{,}2$
- ❄ $\sqrt{4} > \sqrt{3} > \sqrt{2}$
- ❄ $0 > -\frac{1}{2}$
- ❄ $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$
- ❄ $-\frac{2}{5} < 0 < \frac{1}{2}$
- ❄ $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$
- ❄ $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2 + \sqrt{2}$
- ❄ $\sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2}$
- ❄ $23 < 23^2$
- ❄ $0{,}25 > (0{,}25)^2$
- ❄ $23 > \sqrt{23}$
- ❄ $0{,}25 < \sqrt{0{,}25}$
- ❄ $4 - 2\sqrt{2} < 4 - \sqrt{2}$
- ❄ $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$
- ❄ $0{,}42013 < 0{,}4201301$.

Com significados e nomenclaturas semelhantes aos de $a < x < b$ escreveremos:

$$a \leq x < b \quad ; \quad a \leq x \leq b \quad ; \quad a < x \leq b .$$

Exemplos

- ❄ $1 \leq \sqrt{2} < 2$
- ❄ $2 \leq 2$
- ❄ $4 > \pi \geq 3$
- ❄ $-\sqrt{2} \geq -2$
- ❄ $-\sqrt{3} \leq -\sqrt{2} \leq -1$
- ❄ $-6 \geq -2\pi > -8$
- ❄ $-\sqrt{2} \geq -\sqrt{2}$
- ❄ $\sqrt{3} \geq \sqrt{2}$
- ❄ $0{,}02 \geq 0 \geq -\frac{1}{2}$
- ❄ $-\pi \leq -3$
- ❄ $-\sqrt{3} \leq -\sqrt{2}$
- ❄ $0{,}5 \leq \frac{1}{2}$
- ❄ $1 \leq 0{,}9$
- ❄ $1{,}1001 \geq 1{,}1$
- ❄ $-5{,}01 \leq -5{,}009$.

❄ $2,001 \geq 2,00099$ ❄ $\sqrt[5]{1,234} \leq 1,234$ ❄ $\sqrt{0,\overline{81}} \geq 0,\overline{81}$.

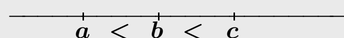
1 Propriedades da relação de ordem

Dados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ temos:

☞ **se** $\boldsymbol{a < b}$ **e** $\boldsymbol{b < c}$ **então** $\boldsymbol{a < c}$.

☞ **se** $\boldsymbol{a \leq b}$ **e** $\boldsymbol{a \geq b}$ **então** $\boldsymbol{a = b}$.

A primeira propriedade também é verdadeira quando trocamos "$<$" por "$\leq$", por "$>$" ou por "$\geq$". Ela é conhecida como *propriedade transitiva* da relação de ordem.



Representação gráfica da transitividade

Dados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ apenas uma das alternativas ocorre: $\boldsymbol{a = b}$, $\boldsymbol{a < b}$, $\boldsymbol{a > b}$.

Exemplos

❄ Se $x < 2$ e $2 < y$ então $x < y$.

❄ Se $x \leq \pi$ e $\pi \leq x$ então $x = \pi$.

❄ Se $y \leq 3$ e $3 \leq x+1$ então $y \leq x+1$.

❄ Se $a+b \leq 3$ e $3 < 2a$ então $a+b < 2a$.

❄ Se $a < b$ então $a \leq b$.

❄ Se $x \geq y$ e $y > \pi$ então $x > \pi$.

☛ **Nota:** Escrevemos $a \nless b$ para indicar que a *não é menor do que* b. Isso significa que $a = b$ ou $a > b$, ou seja:

$$a \nless b \iff a = b \text{ ou } a > b \iff a \geq b\,.$$

Analogamente temos: $a \nleq b \iff a > b$.

Além das propriedades vistas acima, temos ainda:

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ temos:	De $\sqrt{5} < 2{,}23$ podemos concluir que:
☞ $a < b \iff a + c < b + c$	☞ $\sqrt{5} + 1 < 2{,}23 + 1.$
Quando c **é positivo** temos:	
☞ $a < b \iff a \times c < b \times c$	☞ $\pi \times \sqrt{5} < \pi \times 2{,}23.$
Quando c **é negativo** temos:	
☞ $a < b \iff a \times c > b \times c$	☞ $-2{,}1 \times \sqrt{5} > -2{,}1 \times 2{,}23.$

Essas três últimas propriedades também permanecem verdadeiras quando invertemos os sinais de desigualdade e/ou inserimos o sinal de igual.

2 Outras propriedades

Como conseqüência das propriedades anteriores temos as seguintes regras:

Dados a, b, c, d **quaisquer** temos:

$$\begin{array}{r} a < b \\ c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array} \quad (+)$$

Quando a, b, c, d são **positivos** temos:

$$\begin{array}{r} a < b \\ c < d \\ \hline a \times c < b \times d \end{array} \quad (\times)$$

Quando a, b são **positivos** temos:

$$a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Essas regras também valem quando trocamos "$<$" por "$\leq$" e "$>$" por "$\geq$".

☛ **Atenção:** Não subtraímos nem dividímos desigualdades de mesmo sinal. Veja os exercícios 16 e 17 a seguir.

Enunciamos agora mais três regras, consequências das regras anteriores.

Quando $a, b > 0$ e $n \in \mathbb{Z}^+$ temos:

$$a < b \iff a^n < b^n.$$

Quando $a, b > 0$ e $n \in \mathbb{Z}^+$ temos:

$$a < b \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Quando $\boldsymbol{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d > 0}$ temos:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad ad < bc\,.}$$

As regras acima continuam válidas quando trocamos o sinal " $<$ " por " $\leq$ " por " $>$ " ou por " $\geq$ " .

Exercícios resolvidos

1. $\boldsymbol{\frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{79} < \frac{1}{4} + \frac{1}{22} + \frac{1}{79}}$ **?**

Solução Sem fazer os cálculos, concluímos que a resposta é **SIM** pois $\frac{1}{23} < \frac{1}{22}$ e todas as outras parcelas são comuns a ambos os membros da desigualdade, isto é:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{79} < \frac{1}{4} + \frac{1}{22} + \frac{1}{79} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{23} + \frac{1}{79} < \frac{1}{22} + \frac{1}{79} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{23} < \frac{1}{22}\,.$$

2. $\boldsymbol{(3421 + 2101{,}2)(11101{,}02 - 2202{,}33) < (3421 + 2101{,}2)(11101{,}02 + 2202{,}33)}$ **?**

Solução Temos que $-2202{,}33 < 2202{,}33$. Logo, $11101{,}02 - 2202{,}33 < 11101{,}02 + 2202{,}33$. Consequentemente, como $3421 + 2101{,}2$ é positivo, segue que

$$(3421 + 2101{,}2)(11101{,}02 - 2202{,}33) < (3421 + 2101{,}2)(11101{,}02 + 2202{,}33)\,,$$

mostrando que a afirmação é verdadeira. Logo, a resposta é **SIM**.

3. **Sejam $a\,,b$ números reais. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Justifique suas respostas.**

(1) $\boldsymbol{a < 3 \text{ e } 3 < 2b - 1 \implies a < 2b - 1\,;}$
(2) $\boldsymbol{a \leq 1 \text{ e } 3 \leq 2b - 1 \implies a \leq 2b - 3\,;}$
(3) $\boldsymbol{a \leq 3 + b \text{ e } 3 + b \leq a \implies a - 3 = b\,;}$
(4) $\boldsymbol{a \leq 1 \text{ e } b \geq 2 \implies a \leq 2b - 3\,;}$
(5) $\boldsymbol{2b + 1 \leq 2a \text{ e } a \leq 1/2 + b \implies a = b + 1/2\,;}$
(6) $\boldsymbol{a < -1 \text{ e } b + 1/a < 1 \implies ab > a - 1\,;}$
(7) $\boldsymbol{b - 2a < 1 \implies 2a > b - 1\,;}$
(8) $\boldsymbol{a + b \geq 2 \text{ e } a - b \leq 1 \implies a^2 - b^2 \leq a + b\,;}$
(9) $\boldsymbol{a + b \geq 2 \text{ e } a - b \leq 1 \implies a^2 - b^2 \geq 2a - 2b\,;}$
(10) $\boldsymbol{a + b \geq 2 \text{ e } a - b \leq 1 \implies 2 - b \leq a \leq 1 + b\,;}$
(11) $\boldsymbol{a + 2b \leq 0 \text{ e } 2a - b > 1 \implies (1 + b)/2 \leq a < -2b\,;}$
(12) $\boldsymbol{a + 3 \leq b \text{ e } b - 5 < 2a \implies (b - 5)/2 < a \leq b - 3\,.}$

Solução Vamos usar as diversas propriedades das desigualdades.

(1) A afirmação (1) é **verdadeira**. Trata-se de uma aplicação imediata da propriedade transitiva da relação de ordem.

(2) De $3 \leq 2b - 1$ concluímos que $1 \leq 2b - 3$. Assim, temos que: $a \leq 1$ e $1 \leq 2b - 3$. Consequentemente, $a \leq 2b - 3$. Concluímos assim que a afirmação (2) é **verdadeira**.

(3) De $a \leq 3 + b$ e $3 + b \leq a$ segue que $a = b + 3$, isto é, $a - 3 = b$. Logo, a afirmação (3) é **verdadeira**.

(4) De $b \geq 2$ segue que $2b \geq 4$ ou seja, $1 \leq 2b - 3$. Agora, de $a \leq 1$ e $1 \leq 2b - 3$ obtemos $a \leq 2b - 3$. Consequentemente, a afirmação é **verdadeira**.

(5) Dividido por 2 a primeira desigualdade obtemos $b + 1/2 \leq a$. Assim, de $b + 1/2 \leq a$ e $a \leq 1/2 + b$ concluímos que $a = b + 1/2$. Logo, a afirmação é **verdadeira**.

(6) Note que a é negativo. Assim, multiplicando por a ambos os membros da segunda desigualdade teremos: $ab + 1 > a$. Portanto, $ab > a - 1$. Assim, a afirmação é **verdadeira**.

(7) Multiplicando ambos os membros da primeira desegualdade por -1 teremos: $-b + 2a > -1$. Donde, $2a > b - 1$ mostrando que a afirmação é **verdadeira**.

(8) Temos que $a + b$ é positivo. Assim, multiplicando ambos os membros da segunda desigualdade por $a + b$ obtemos $a^2 - b^2 \leq a + b$ concluíndo que a afirmação é **verdadeira**.

(9) Multiplicando a primeira desigualdade por $a - b$ obteríamos a terceira desigualdade, erradamente, pois $a - b$ pode ser negativo. Vamos então tentar a construção de um contra-exemplo a afirmação desse item. Para tal, tomemos $a = 1$ e $b = 2$. Nesse caso temos que:

$$a + b = 3 \geq 2 \quad ; \quad a - b = -1 \leq 1 \quad \text{no entanto,} \quad a^2 - b^2 = -3 \ngeq -2 = 2a - 2b\,.$$

Mostramos assim que a afirmação é **falsa**.

(10) Por um lado temos que $a \geq 2 - b$. Por outro, $a \leq 1 + b$. Segue então que $2 - b \leq a \leq 1 + b$ o que mostra que a afirmação é **verdadeira**.

(11) Das duas primeiras desigualdades obtemos que $a \leq -2b$ e $a > (1 + b)/2$. Podemos agora concluir que $(1 + b)/2 < a \leq -2b$. Logo, a afirmação é **verdadeira**.

(12) Como no item anterior obtemos: $a \leq b - 3$ e $a > (b - 5)/2$. Donde, $(b - 5)/2 < a \leq b - 3$. Portanto, a afirmação é **verdadeira**.

4. **Sejam a, b números reais. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Justifique suas respostas.**

(1)	$\boldsymbol{a < -1 \text{ e } b \geq 4/3}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{a \leq 2b - 3}$;
(2)	$\boldsymbol{a \leq b - 1 \text{ e } b \leq 5}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{a + b \leq 8}$;
(3)	$\boldsymbol{a + b \leq 2 \text{ e } 2a \geq 3}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{b + 2 \leq a}$;
(4)	$\boldsymbol{a + b \leq 2 \text{ e } 2a \geq 3}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{b \leq a}$;
(5)	$\boldsymbol{a + b \geq 2 \text{ e } a - b \leq 1}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{b \geq 1/2}$;
(6)	$\boldsymbol{a + 2b \leq 0 \text{ e } 2a - b > 1}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{b < -1/5}$;
(7)	$\boldsymbol{a \neq 0 \text{ e } a < 1}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{1/a > 1}$;
(8)	$\boldsymbol{\lvert a\rvert + 2 < b}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{b/(\lvert a\rvert + 2) > 1}$;
(9)	$\boldsymbol{a + b \geq 2 \text{ e } a - b > 1}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{a^2 \geq 2 + b^2}$;
(10)	$\boldsymbol{a \geq 2}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{1/(a + 1) \leq 1/3}$;
(11)	$\boldsymbol{a \geq 3 \text{ e } b \leq 1}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{(b + 1)/(a^2 - 1) \leq 1/4}$;
(12)	$\boldsymbol{a > \sqrt{2}}$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{1/(a^2 + 1) \leq 1/3}$.

Solução Novamente, faremos uso das propriedades das desigualdades.

(1) De $b \geq 4/3$ segue que $2b \geq 8/3$. Agora, somando membro a membro as desigualdades $a < -1$ e $0 \leq 2b - 8/3$ obtemos:

$$a < 2b - \frac{8}{3} - 1 = 2b - 3 - \frac{2}{3} < 2b - 3\,.$$

Portanto, $a \leq 2b - 3$ e demonstramos que a afirmação é **verdadeira**.

(2) Somando as duas desigualdades obtemos: $a + b \leq b - 1 + 5$ ou seja, $a + b \leq b + 4$. Como $b \leq 5$, concluímos que $a + b \leq 9$, que não é a desigualdade desejada!!!

Será que a afirmação proposta é falsa? Para mostrar que ela é falsa precisamos construir um contra-exemplo. Tomemos então $b = 5$ e $a = 4$. Note que esses valores satisfazem as condições $b \leq 5$ e $a \leq b - 1$. No entanto, $a + b \not\leq 8$ pois $a + b = 9$. Assim, concluímos que a afirmação proposta é **falsa**.

(3) De $2a \geq 3$ segue que $-2a \leq -3$. Somando essa última desigualdade com $a + b \leq 2$ segue que $a + b - 2a \leq 2 - 3$, ou seja, $b + 1 \leq a$ que não é a desigualdade proposta. Será que a conclusão $b + 2 \leq a$ é falsa? Vejamos. Tome $a = 3/2$ e $b = 2 - 3/2 = 1/2$ os quais satisfazem as hipóteses $2a \geq 3$ e $a + b \leq 2$ mas não satisfazem a tese $b + 2 \leq a$ já que $b + 2 = 5/2$ e $a = 3/2$. Logo, a afirmação proposta é **falsa**.

(4) Seguindo os argumentos do item anterior concluímos que $b + 1 \leq a$ que não é a desigualdade desejada. No entanto, como $b \leq b + 1$ concluímos que $b \leq a$ mostrando que a afirmação proposta é **verdadeira**.

(5) De $a - b \leq 1$ concluímos que $b - a \geq -1$. Somando essa última desigualdade com $a + b \geq 2$ teremos que $2b \geq 1$ e consequentemente, $b \geq 1/2$. Portanto, a afirmação proposta é **verdadeira**.

(6) Multiplicando a primeira desigualdade por -2 teremos $-2a - 4b \geq 0$. Somando essa desigualdade com $2a - b > 1$ obtemos $-5b > 1$. Donde, $b < -1/5$, concluíndo que a afirmação (6) é **verdadeira**.

(7) Como $a \neq 0$, temos que $1/a$ está bem definido. Invertendo os membros da desigualdade $a < 1$ obtemos $1/a > 1$ o que não é correto pois a pode ser negativo. Procuremos então um contra-exemplo para a afirmação proposta no exercício. Para isso, seja $a = -1$. Assim, temos $a = -1 < 1$ mas $1/a = -1 \not> 1$. Portanto, a afirmação (7) é **falsa**.

(8) Temos que $|a| + 2$ é positivo. Logo, dividindo a desigualdade $|a| + 2 < b$ por $|a| + 2$ teremos, $1 < b/(|a| + 2)$, ou seja, $b/(|a| + 2) > 1$ mostrando que a afirmação é **verdadeira**.

(9) Note que $a+b$ e $a-b$ são positivos. Logo, $(a+b)(a-b) > 2$, isto é, $a^2 - b^2 > 2$. Portanto, $a^2 > 2 + b^2$, mostrando que a afirmação é **verdadeira**.

(10) De $a \geq 2$ segue que $a+1 \geq 3$. Logo, $1/(a+1) \leq 1/3$, mostrando que a afirmação é **verdadeira**.

(11) De $b \leq 1$ obtemos, $b+1 \leq 2$. De $a \geq 3$ segue que $a^2 \geq 9$ e, consequentemente, $a^2 - 1 \geq 8$. Assim, $a^2 - 1$ é positivo e temos

$$\frac{b+1}{a^2-1} \leq \frac{2}{a^2-1} \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, a afirmação (11) é **verdadeira**.

(12) De $a > \sqrt{2}$ segue que $a^2 > 2$. Logo, $a^2 + 1 \geq 3$. Consequentemente,

$$\frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{3}.$$

Mostrando assim que a afirmação (12) é **verdadeira**.

5. $\mathbf{2 + \sqrt{1{,}5} > 2{,}5\,\sqrt{1{,}5}\ ?}$

Solução Temos que $1{,}5 = 15/10 = 3/2$ e $2{,}5 = 25/10 = 5/2$. Assim,

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{1{,}5} > 2{,}5\sqrt{1{,}5} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 + \sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad 4 + 4\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} > \frac{25}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{75}{8} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{44}{8} + 4\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{75}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad 4\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{31}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{9}{2}} > \frac{31}{32} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{9}{2} > \frac{31^2}{32^2}. \end{aligned}$$

A última desigualdade é verdadeira pois $9/2 > 1$ enquanto que $31^2/32^2 < 1$. Consequentemente, a resposta é **SIM**.

6. **Determine os valores da variável x que satisfazem a desigualdade $x + 1 < 3x - 2 \leq 2x + 4$.**

Solução Precisamos determinar os valores de x que satisfazem, simultaneamente, às duas desigualdades: $3x - 2 \leq 2x + 4$ e $3x - 2 > x + 1$.

Resolvendo $3x - 2 \leq 2x + 4$:

$3x - 2 \leq 2x + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 2x \leq 4 + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 6$.

Resolvendo $3x - 2 > x + 1$:

$3x - 2 > x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - x > 2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x > 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 3/2$.

Portanto, x satisfaz a desigualdade $x + 1 < 3x - 2 \leq 2x + 4$ se, e somente se $3/2 < x \leq 6$.

7. **Para cada inteiro n defina**

$$\langle n\rangle = \begin{cases} n^2 - n & \text{quando } n \text{ é par} \\ n^2 + n & \text{quando } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Pergunta-se: $\dfrac{\langle n\rangle}{\langle n+1\rangle} < \dfrac{n}{n+1}$ **quando n é um inteiro par e positivo ?**

Solução Seja n um inteiro par e positivo. Observemos primeiramente que sendo n par então $n+1$ é ímpar. Assim, da definição de $\langle n\rangle$ segue que:

$$\frac{\langle n\rangle}{\langle n+1\rangle} = \frac{n^2-n}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n+2}\,.$$

Como $\dfrac{n-1}{n+2} < 1$ e $\dfrac{n}{n+1}$ é positivo, obtemos:

$$\frac{n-1}{n+2} < 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n+2} < \frac{n}{n+1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\langle n\rangle}{\langle n+1\rangle} < \frac{n}{n+1}\,.$$

Portanto, a resposta é **SIM**.

8. **$100^{100} > 99^{100} + 99^{99}$?**

Solução Temos que

$$100^{100} = 100^{99} \times 100 > 99^{99} \times 100 = 99^{99}(1+99) = 99^{99} + 99^{99} \times 99 = 99^{99} + 99^{100}.$$

Logo, a respota é **SIM**.

9. **Sejam $a\,,b\,,c \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$ e $c = a + b$. Qual o sinal das expressões a seguir ?**
(1) $2a - c$ (2) $2b - c$ (3) $c + 2b$ (4) $c - a + b$ (5) $c + a - b$.

Solução De $a < b$ segue que $a - b < 0$ e $b - a > 0$. Assim,

(1) $2a - c = 2a - (a+b) = a - b < 0$;
(2) $2b - c = 2b - (a+b) = b - a > 0$;
(3) $c + 2b > 0$ já que as duas parcelas são positivas;
(4) $c - a + b = a + b - a + b = 2b > 0$;
(5) $c + a - b = a + b + a - b = 2a > 0$.

10. **Sejam $a\,,b\,,c \in \mathbb{R}$ tais que $a - b + c > 6$ e $a + b - c > 10$. Pergunta-se:**
(1) $a > 0$? (2) $b > c$? (3) $bc > 0$?

Solução

(1) Somando as duas desigualdades, teremos: $2a > 16 \implies a > 8$. Portanto, a é positivo.

(2) NÃO. Para ver isso, basta tomar $b = c = 0$ e $a = 11$.

(3) NÃO, e como no caso anterior, para justificar a resposta, basta tomar $b = c = 0$ e $a = 11$.

11. **Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Pergunta-se:**

$$\frac{100!}{98!} < 100 \times \frac{50!}{49!} \ ?$$

Solução Usando a definição acima temos que:

$$\frac{100!}{98!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 98 \times 99 \times 100}{1 \times 2 \times \cdots \times 98} = 99 \times 100\,;$$

$$100 \times \frac{50!}{49!} = 100 \times \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 48 \times 49 \times 50}{1 \times 2 \times \cdots \times 48 \times 49} = 100 \times 50\,.$$

Logo, a resposta é **NÃO**.

12. **Responda as seguintes questões:**

(a) $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$? **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{4}$? **(c)** $\sqrt{5} - \sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$? **(d)** $\sqrt{5} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$?

Solução A estratégia aqui é usar as propriedades das desigualdades afim de simplificá-las até obter uma outra desigualdade, simples de ser verificada.

(a) $\frac{7}{8} < \frac{8}{9} \iff 7 \times 9 < 8 \times 8 \iff 63 < 64.$

Consequentemente, a resposta é **SIM**.

(b) $\frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{4} \iff 4 \times \sqrt{2} > 3\sqrt{3} \iff 32 > 27.$

Portanto, a resposta é **SIM**.

(c) $\sqrt{5} - \sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} \iff \left(\sqrt{5} - \sqrt{4}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{4}\right) < 1 \iff 5 - 4 < 1\,.$

Portanto, a resposta é **NÃO**.

(d) $\sqrt{5} > \sqrt{2} + \sqrt{3} \iff 25 > 2 + 2\sqrt{6} + 3 \iff 20 > 2\sqrt{6} \iff 10 > \sqrt{6}\,.$

Logo, a resposta é **SIM**.

13. **Mostre que $1 - \sqrt{7} < -\frac{3}{2}$.**

Solução Temos que:

$$1-\sqrt{7}<-\frac{3}{2} \iff 1+\frac{3}{2}<\sqrt{7} \iff \frac{5}{2}<\sqrt{7} \iff 5<2\sqrt{7} \iff 25<28\,.$$

Assim, fica mostrado que $1-\sqrt{7}<-\dfrac{3}{2}$.

14. Qual é o maior número inteiro n que satisfaz a desigualdade $2n^2+8n-3<n^2+6n+8$?

Solução Para resolver essa questão vamos procurar todos os números reais que satisfazem a disigualdade proposta. Assim, dado $x\in\mathbb{R}$ temos que:

$$2x^2+8x-3<x^2+6x+8 \iff x^2+2x-11<0\,.$$

Por outro lado, temos que:

$$x^2+2x-11=0 \iff x=\frac{-2\pm\sqrt{4+44}}{2} \iff x=\frac{-2\pm4\sqrt{3}}{2} \iff x=-1\pm2\sqrt{3}\,.$$

Consequentemente,

$$2x^2+8x-3<x^2+6x+8 \iff -1-2\sqrt{3}<x<-1+2\sqrt{3}\,.$$

Agora, precisamos determinar o maior inteiro contido no intervalo $(-1-2\sqrt{3}\,,-1+2\sqrt{3})$.

- Sabemos que: $-1-2\sqrt{3}<1<-1+2\sqrt{3}$ pois o termo mais à esquerda é negativo e à direita temos: $1<-1+2\sqrt{3} \iff 2<2\sqrt{3} \iff 4<12\,.$
  Assim, o número $1\in(-1-2\sqrt{3}\,,-1+2\sqrt{3})$.
- Por outro lado não é difícil concluir que $3\notin(-1-2\sqrt{3}\,,-1+2\sqrt{3})$ já que $3>-1+2\sqrt{3}$. Note que: $3>-1+2\sqrt{3} \iff 4>2\sqrt{3} \iff 2>\sqrt{3} \iff 4>3\,.$
  Resta saber se o número inteiro 1 é de fato o maior inteiro nesse intervalo.
- Para isso, vamos testar o inteiro 2:

$$2<-1+2\sqrt{3} \iff 3<2\sqrt{3} \iff 9<12\,.$$

Agora podemos concluir que o maior inteiro satisfazendo a desigualdade $2n^2+8n-3<n^2+6n+8$ é o número 2.

15. Determine o menor inteiro que é maior do que $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

Solução Temos que $3<\sqrt{10}<4$ e $1<\sqrt{2}<2$. Assim, somando membro a membro essas desigualdades obtemos: $4<\sqrt{10}+\sqrt{2}<6$. Isso mostra que 6 é um inteiro que é maior do que $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. Mostra também que o inteiro 4 não tem a propriedades requerida.

Resta saber se 6 é o menor inteiro com essa propriedade. Para isso, precisamos verificar se 5 é maior ou menor do que $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. Vejamos:

$$\sqrt{10}+\sqrt{2}<5 \iff \sqrt{10}<5-\sqrt{2} \iff 10<25-10\sqrt{2}+2 \iff 10\sqrt{2}<17$$
$$\iff 200<17^2 \iff 200<289.$$

Isso mostra que $\sqrt{10}+\sqrt{2}<5$. Como, $4<\sqrt{10}+\sqrt{2}$ concluímos que 5 é o inteiro procurado.

16. **Sabendo que $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$ e $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ faça estimativas para $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ e $\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$.**

Solução Somando ambas as desigualdade obtemos a seguinte estimativa para $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$.

$$\begin{array}{rcl} 1{,}2 < & \sqrt[3]{2} & < 1{,}3 \\ 1{,}7 < & \sqrt{3} & < 1{,}8 \\ \hline 2{,}9 < & \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} & < 3{,}1\,. \end{array}$$

Para obter uma estimativa para $\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$, multiplicamos a estimativa $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$ por -1, obtendo:

$$-1{,}2 > -\sqrt[3]{2} > -1{,}3\ ,\ \text{isto é}\ ,\ -1{,}3 < -\sqrt[3]{2} < -1{,}2\,.$$

Agora, somando as desigualdade, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} 1{,}7 < & \sqrt{3} & < 1{,}8 \\ -1{,}3 < & -\sqrt[3]{2} & < -1{,}2 \\ \hline \frac{2}{5} = 0{,}4 < & \sqrt{3} - \sqrt[3]{2} & < 0{,}6 = \frac{3}{5}\,. \end{array}$$

Consequentemente, $\dfrac{2}{5} < \sqrt{3} - \sqrt[3]{2} < \dfrac{3}{5}$.

☛ **Atenção:** Repare que não fizemos uma subtração entre as estimativas de $\sqrt{3}$ e de $\sqrt[3]{2}$.

17. **Use as estimativas dadas no exercício anterior para fazer uma estimativa para $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.**

Solução Invertendo a estimativa de $\sqrt[3]{2}$ obtemos: $\frac{1}{1{,}3} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < \frac{1}{1{,}2}$.

Multiplicando as estimativas a seguir, concluímos:

$$\begin{array}{c} 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \\ \frac{1}{1{,}3} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < \frac{1}{1{,}2} \\ \hline \frac{17}{13} = \frac{1{,}7}{1{,}3} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} < \frac{1{,}8}{1{,}2} = \frac{18}{12}\,. \end{array}$$

Consequentemente, $\dfrac{17}{13} < \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} < \dfrac{3}{2}$.

☛ **Atenção:** Repare que não fizemos uma divisão entre as estimativas de $\sqrt{3}$ e de $\sqrt[3]{2}$.

18. **Use as estimativas $3{,}1 < \pi < 3{,}2$ e $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ determine estimativas para**

(a) $\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}$ **(b)** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2} - 1}$

Solução **(a)** Temos que:

$$3{,}1 < \pi < 3{,}2 \iff \frac{3{,}1}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{3{,}2}{2} \tag{14.1}$$

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \iff -1{,}4 > -\sqrt{2} > -1{,}5 \iff -1{,}5 < -\sqrt{2} < -1{,}4\,. \tag{14.2}$$

Somando as estimativas à direita em (14.1) e (14.2) obtemos:

$$\frac{3{,}1}{2} - 1{,}5 < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} < \frac{3{,}2}{2} - 1{,}4 \iff \frac{3{,}1-3}{2} < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} < \frac{3{,}2-2{,}8}{2}$$
$$\iff 0{,}05 < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} < 0{,}2$$

determinando assim a estimativa que pretendíamos.

(b) Por outro lado, segue das propriedades de desigualdade que:

$$1{,}4 - 1 < \sqrt{2} - 1 < 1{,}5 - 1 \iff 0{,}4 < \sqrt{2} - 1 < 0{,}5 \iff \frac{1}{0{,}4} > \frac{1}{\sqrt{2}-1} > \frac{1}{0{,}5}$$
$$\iff \frac{1}{0{,}5} < \frac{1}{\sqrt{2}-1} < \frac{1}{0{,}4} \iff 2 < \frac{1}{\sqrt{2}-1} < \frac{5}{2}\,. \qquad (14.3)$$

Agora, multiplicando as estimativas à direita em (14.3) e à esquerda (14.1) obtemos o seguinte resultado:

$$2 \times 3{,}1 < \frac{\pi}{\sqrt{2}-1} < \frac{5 \times 3{,}2}{2} \iff 6{,}2 < \frac{\pi}{\sqrt{2}-1} < 8$$

obtendo assim, a segunda estimativa que pretendíamos.

19. Mostre que $\frac{1}{4} < \sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{3}$.

Solução Temos duas desigualdades a considerar:

Caso 1: $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{3}$

Nesse caso temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - \sqrt{2} < \tfrac{1}{3} &\iff 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} < 1 \iff 3\sqrt{3} < 3\sqrt{2} + 1 \iff 27 < 18 + 6\sqrt{2} + 1 \\ &\iff 8 < 6\sqrt{2} \iff 4 < 3\sqrt{2} \iff 16 < 18\,. \end{aligned}$$

Assim, afirmar que $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{3}$ é o mesmo que afirmar $16 < 18$. Logo, a afirmação $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{3}$ é verdadeira.

Caso 2: $\sqrt{3} - \sqrt{2} > \frac{1}{4}$

Nesse caso temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - \sqrt{2} > \tfrac{1}{4} &\iff 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} > 1 \iff 4\sqrt{3} > 4\sqrt{2} + 1 \iff 48 > 32 + 8\sqrt{2} + 1 \\ &\iff 15 > 8\sqrt{2} \iff 15^2 > 64 \times 2 \iff 225 > 128\,. \end{aligned}$$

Segue daí que $\sqrt{3} - \sqrt{2} > \frac{1}{4}$ também é verdadeira.

Os dois casos acima nos permitem concluir que $\frac{1}{4} < \sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{3}$ como queríamos mostrar.

20. Qual o maior dos números: $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{2} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$?

Solução Vamos analizar a afirmação $\sqrt{3} < \sqrt{2} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

Temos que:

$$\sqrt{3} < \sqrt{2} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} \iff \sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{5-2\sqrt{6}} \iff 3 - 2\sqrt{6} + 2 < 5 - 2\sqrt{6}$$
$$\iff 5 - 2\sqrt{6} < 5 - 2\sqrt{6} \iff 5 < 5\,.$$

Repare que se tivéssemos começado com o sinal de *maior* taambém teríamos chegado ao absurdo $5 > 5$. Isso mostra que, de fato, temos que

$$\sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.$$

21. **Seja $a \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são falsas ? Justifique sua resposta.**
(1) $a > 2 \implies a^2 > 2a$ (2) $a < -1 \implies a^2 < -a$ (3) $a < 2 \implies a^2 < 2a$.

Solução As desigualdades à direita são obtidas multiplicando as desigualdades à esquerda por a.

(1) Como $a > 2$ segue que a é positivo. Assim, multiplicando a desigualdade $a > 2$ por a obtemos $a^2 > 2a$, mantendo o sinal de " $>$ ". Concluímos assim que a afirmação em questão é **verdadeira**.

(2) Ao multiplicar a desigualdade $a < -1$ por a (que é negativo) obtemos $a^2 > -a$. Isso nos garante que a afirmação do item (2) é **falsa** pois, a^2 não pode ser ao mesmo tempo maior e menor do que $-a$.

(3) Esse caso é semelhante ao anterior pois a pode assumir valores negativos. Um contra-exemplo pode ser construído tomando $a = -1$. Assim, a satisfaz a hipótese ($a < 2$) mas não satisfaz a tese ($a^2 < 2a$) pois $a^2 = 1$ e $2a = -2$. Logo, a afirmação do item (3) é **falsa**.

22. **Resolva a inequação $\dfrac{x+1}{|x|} + \dfrac{1}{|x|(|x|-1)} \geq \dfrac{|x|}{3}$.**

Solução Não vamos resolver essa inequação usando as propriedades da relação de ordem estudadas nessa lição. As leis de cancelamento na multiplicação para uma desigualdade são diferentes daquelas que vimos para a igualdade. Dependendo do sinal do termo a ser cancelado, precisamos trocar o sinal da desigualdade. E muitas vezes o termo a ser cancelado é positivo para alguns valores da variável e negativo para outros. Assim, para resolver inequações não elementares, usaremos a técnica do estudo do sinal da expressão associada, como desenvolvido nas Lições 11 e 12.

Vamos então estudar o sinal da expressão

$$\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3} \tag{14.4}$$

Estudando o sinal da expressão (14.4)*:*

- ☞ O domínio da expressão acima é $\mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$.
- ☞ Resolvendo a equação associada:

$$\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3} = 0 \iff \frac{3(x+1)(|x|-1) + 3 - |x|^2(|x|-1)}{3|x|(|x|-1)} = 0$$
$$\iff \frac{3x|x| - 3x + 3|x| - |x|^2(|x|-1)}{3|x|(|x|-1)} = 0$$

Para resolver a última equação, basta resolver

$$3x|x| - 3x + 3|x| - |x|^2(|x| - 1) = 0 \tag{14.5}$$

Trata-se de uma equação com módulo. Para resolvê-la, vamos usar o estudo de sinal do fator x que é extremamente simples. Temos então dois casos a considerar:

Caso 1: $x \geq 0$.

Nesse caso a equação (14.5) toma a forma:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x + 3x - x^2(x-1) = 0 &\iff 4x^2 - x^3 = 0 \iff x^2(4-x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4 . \end{aligned}$$

Logo, as soluções de (14.5) no intervalo $[\,0\,,\infty\,)$ são: 0 e 4.

Caso 2: $x \leq 0$.

Nesse caso a equação (14.5) toma a forma:

$$\begin{aligned} -3x^2 - 3x - 3x - x^2(-x-1) = 0 &\iff x^3 - 2x^2 - 6x = 0 \iff x(x^2 - 2x - 6) = 0 \\ &\iff x((x-1)^2 - 1 - 6) = 0 \iff x((x-1)^2 - 7) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } (x-1)^2 = 7 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \pm \sqrt{7} . \end{aligned}$$

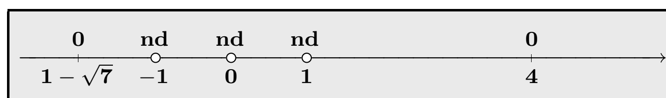
Logo, as soluções de (14.5) no intervalo $(-\infty\,,0\,]$ são: 0 e $1 - \sqrt{7}$.

Assim, as soluções da equação (14.5) são: $0\;;\;4\;;\;1 - \sqrt{7}$.

Consequentemente,

$$\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3} = 0 \iff x \in \left\{1 - \sqrt{7}\,,4\right\}. \tag{14.6}$$

Graficamente, temos



A expressão $\dfrac{x+1}{|x|} + \dfrac{1}{|x|(|x|-1)} - \dfrac{|x|}{3}$ varia continuamente em seu domínio de definição. Assim, para estudar o seu sinal, façamos:

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,1 - \sqrt{7}\,)$:
Avaliando a expressão em $x = -2 \in (-\infty\,,1 - \sqrt{7}\,)$ temos:

$$\left.\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3}\right|_{x=-2} = \frac{(-2)+1}{|-2|} + \frac{1}{|-2|(|-2|-1)} - \frac{|-2|}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} < 0 .$$

☞ Teste de sinal em $(\,1 - \sqrt{7}\,,-1\,)$:
Avaliando a expressão em $x = -3/2 \in (\,1 - \sqrt{7}\,,-1\,)$ temos:

$$\left.\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3}\right|_{x=-\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)} - \frac{\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 .$$

☞ Teste de sinal em $(-1\,,0\,)$:
Avaliando a expressão em $x = -1/2 \in (-1\,,0\,)$ temos:

$$\left.\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3}\right|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{3} = 1 - 4 - \frac{1}{6} < 0 .$$

☞ Teste de sinal em $(0,1)$:
Avaliando a expressão em $x = 1/2 \in (0,1)$ temos:
$$\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3}\bigg|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{3} = 3 - 4 - \frac{1}{6} < 0\,.$$

☞ Teste de sinal em $(1,4)$:
Avaliando a expressão em $x = 2 \in (1,4)$ temos:
$$\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3}\bigg|_{x=2} = \frac{2+1}{2} + \frac{1}{2(2-1)} - \frac{2}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} > 0\,.$$

☞ Teste de sinal em $(4,\infty)$:
Avaliando a expressão em $x = 5 \in (4,\infty)$ temos:
$$\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} - \frac{|x|}{3}\bigg|_{x=5} = \frac{5+1}{5} + \frac{1}{5(5-1)} - \frac{5}{3} = \frac{6}{5} + \frac{1}{20} - \frac{5}{3} = \frac{75 - 5\times 20}{3\times 20} < 0\,.$$

Finalizando o estudo do sinal obtemos:

sinal de
− − **0** + + **nd** − − **nd** − − **nd** + + + + + + + + + **0** − − − −
$1-\sqrt{7}$ -1 0 1 4 (14.4)

Concluímos então que: $\dfrac{x+1}{|x|} + \dfrac{1}{|x|(|x|-1)} - \dfrac{|x|}{3} \geq 0 \iff x \in [\,1-\sqrt{7}, -1\,) \cup (\,1,4\,]\,.$

Dito de outra forma:
$$\frac{x+1}{|x|} + \frac{1}{|x|(|x|-1)} \geq \frac{|x|}{3} \iff x \in [\,1-\sqrt{7}, -1\,) \cup (\,1,4\,]\,.$$

23. Sejam $a, b, c \in (0,\infty)$. Sabendo que $a+b<c$ podemos concluir que $a^2+b^2<c^2$?

Solução Como $a,b,c>0$ segue que $(a+b)^2<c^2$. Logo, $a^2+2ab+b^2<c^2$. Segue daí que:
$$a^2+b^2 < a^2+b^2+2ab < c^2$$
demonstrando o que pretendíamos.

24. Sabendo que $b \in [\,1, 5/3\,)$ faça uma estimativa para $2-5b$.

Solução Temos que:
$$\begin{aligned} b \in [\,1,5/3\,) &\iff 1 \leq b < 5/3 \iff 5 \leq 5b < 25/3 \iff -25/3 < -5b \leq -5 \\ &\iff 2-25/3 < 2-5b \leq 2-5 \iff -19/3 < 2-5b \leq -3\,. \end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte estimativa para $2-5b$:
$$-19/3 < 2-5b \leq -3\,.$$

25. **Sabendo que $|1-3x| \leq 1/2$ faça uma estimativa para $2x-3$.**

Solução Temos que:

$$\begin{aligned} |1-3x| \leq 1/2 &\iff -1/2 \leq 1-3x \leq 1/2 \iff -3/2 \leq -3x \leq -1/2 \\ &\iff 1/6 \leq x \leq 1/2 \iff 1/3 \leq 2x \leq 1 \\ &\iff -3+1/3 \leq 2x-3 \leq 1-3 \iff -8/3 \leq 2x-3 \leq -2\,. \end{aligned}$$

Logo, temos a seguinte estimativa para $2x-3$:

$$-8/3 \leq 2x-3 \leq -2\,.$$

26. **Sabendo que $b \in (-\infty\,, 2\,]$ determine o menor intervalo que contém $1-2b$.**

Solução Sabemos que:

$$b \in (-\infty\,,2\,] \iff b \leq 2 \iff 2b \leq 4 \iff -2b \geq -4 \iff 1-2b \geq 1-4 = -3\,.$$

Portanto, o intervalo procurado é $[-3\,,\infty)$.

27. **Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$ onde $b > 0$. Mostre que se $x \in (\,a\,,\infty)$ então $bx \in (ab\,,\infty)$.**

Solução Como $x \in (\,a\,,\infty)$ e $b > 0$ temos que:

$$x \in (\,a\,,\infty) \iff x > a \iff bx > ba \iff bx \in (\,ab\,,\infty)\,.$$

Concluímos assim que $bx \in (-\infty\,,\,ab\,]$.

28. **Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$ onde $b < 0$. Mostre que se $x \in [\,a\,,\infty)$ então $bx \in (-\infty\,,ab\,]$.**

Solução Seguindo os argumentos do exercício anterior resulta que:

$$x \in [\,a\,,\infty) \iff x \geq a \iff bx \leq ba \iff bx \in (\,ab\,,\infty)\,.$$

Concluímos assim que $bx \in (-\infty\,,ab\,]$.

Exercícios

1. Sejam a, b, c, d números reais. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.
(1) $a < 1$ e $1 < b \implies a < b$;
(2) $a \leq 3$ e $3 < 2b - 1 \implies a < 2b - 1$;
(3) $a \leq 1$ e $3 \leq 2b - 1 \implies a \leq 2b - 3$;
(4) $a \leq 3 + b$ e $3 + b \leq a \implies a - 3 = b$;
(5) $a - 1 \leq b$ e $b + 1 \leq a \implies a = b + 1$;
(6) $a \leq 1$ e $b \geq 2 \implies a \leq 2b - 3$;
(7) $a < -1$ e $b \geq 4/3 \implies a \leq 2b - 3$.
(8) $a < 1 \implies a \leq 1$;
(9) $a < b$ e $b \leq c \implies a < c$;
(10) $a < b$ e $c \leq d \implies a + c < b + d$.

2. Sejam x, $y \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras?
(a) Se x não é menor do que y então $x > y$;
(b) Se $x \not< y$ então $x \geq y$;
(c) Se $x \not\leq y$ então $x > y$;
(d) Se $x \neq y$ então $x > y$ ou $x < y$.
(e) Se $x \neq y$ então $x \geq y$ ou $x \leq y$.

3. Sabendo que x, $y \in \mathbb{R}$ diga quais das afirmações a seguir são falsas.
(a) $x + 2y = \pi$ ou $x + 2y < \pi$ ou $x + 2y > \pi$;
(b) $x - y \leq \sqrt{2}$ ou $x - y \geq \sqrt{2}$;
(c) $2x + y \geq \sqrt{2}$ ou $2x + y < \sqrt{2}$;
(d) $x + y \geq \sqrt{2}$ ou $x + y < \sqrt{3}$;
(e) $xy \geq \sqrt{2}$ ou $xy \leq 1$.

4. Verifique se as desigualdades a seguir são verdadeiras.
(a) $\dfrac{5}{4} < \dfrac{17}{21}$; **R: V**
(b) $12\sqrt{2} < 5\sqrt{11}$; **R: F**
(c) $\sqrt{10} - \sqrt{8} > \sqrt{7} - \sqrt{5}$; **R: F**
(d) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} < \sqrt{3} - 1$; **R: F**
(e) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2} < \dfrac{17}{8 - \sqrt{14}}$. **R: V**

5. Um CD tem um raio r estimado em *cm* por $5,8 < r < 5,9$. Pede-se:
(a) uma estimativa para o perímetro desse disco usando a estimativa $3,1 < \pi < 3,2$.
(b) uma estimativa para a área desse disco usando a estimativa $3,1 < \pi < 3,2$.

6. Sejam a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.
(1) $a > 1 \implies a \geq 1$
(2) $a < b$ e $b \leq c \implies a < c$
(3) $a < b$ e $b \leq c \implies a \leq c$
(4) $a < b$ e $c \leq d \implies a + c < b + d$
(5) $a < b$ e $c \leq d \implies a + c \leq b + d$
(6) $a < 1 \implies \frac{1}{a} > 1$;
(7) $a \leq b \implies \pi a \leq \pi b$;
(8) $a > 2b \implies \frac{a}{b} > 2$;
(9) $a \geq b - 1 \implies a^3 \geq ba^2 - a^2$;
(10) $2a < b^2 \implies 2a^3 < b^2 a^2$;
(11) $a \geq 2b - 1 \implies -a \leq 1 - 2b$;
(12) $a \geq ab \implies b \leq 1$;
(13) $a - 1 < b^3 \implies a < b^3 + 2$;
(14) $a^2 < 3b + 1 \implies 3b + 1 > 0$;
(15) $|a| \times b > 1 \implies b > 1/|a|$;
(16) $|a| \times b < 1 \implies b < 1/|a|$;
(17) $|a| < |b| \implies |a + 2| < |b + 2|$;
(18) $|ab| \geq 1 \implies |a| \geq 1/|b|$;
(19) $|ab| \geq 1 \implies |ab^2| \geq b$;
(20) $|ab| \geq 1 \implies |ab| \times b \geq b$.

7. Mostrar que:
(a) dados $a, b > 0$ temos:
$$a < b \iff a^2 < b^2.$$
(b) dados $a, b \in \mathbb{R}$ temos:
$$a < b \iff a^3 < b^3.$$

8. Generalize essas regras para expoentes inteiros positivos quaisquer e demonstre-as.

9. Sabendo que
$$2,4 < \sqrt{6} < 2,5 \quad \text{e} \quad 1,6 < \sqrt[4]{8} < 1,8$$
faça estimativas para:
(1) $\sqrt[4]{8} + \sqrt{6}$
(2) $2\sqrt[4]{8} - \sqrt{6}$
(3) $2\sqrt[4]{8} - \sqrt{6}$
(4) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{6}$
(5) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ e $\frac{1}{\sqrt{6}}$
(6) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$
(7) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}} - \frac{2}{\sqrt{6}}$
(8) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{8}}$.

10. A *velocidade escalar média* de um objeto é obtida dividindo o espaço que o objeto percorreu pelo tempo gasto em percorrê-lo.

Um ciclista percorre 7 vezes uma pista circular. Conhecendo as estimativas do raio R da pista e do tempo T gasto no percurso das 7 voltas, faça uma estimativa da velocidade escalar média do ciclista.

São dados:

$0,30 < R < 0,31$ (em quilômetros)
$0,25 < T < 0,26$ (em horas) .

11. Mostre que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

12. Mostre que

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

13. Determine os valores de $n \in \mathbb{Z}^+$ para os quais

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{n}.$$

14. Sabendo que $b \in [-2\,,5]$ faça uma estimativa para $2 - 3b$.

15. Sabendo que $b \in [2\,,5]$ faça uma estimativa para $b^2 - 2b$.

16. Sabendo que $|2 - x| \leq 1$ faça uma estimativa para $x^2 + 1$.

17. Sabendo que $|2 - 3b| \leq 1$ faça uma estimativa para $1/b$.

18. Sabendo que $|3x - 2| \geq 4$ determine o menor subconjunto da reta que contém $x^2 + 2x$.

19. Sabendo que $|5 - 2b| < 2$ determine, em cada item, o menor subconjunto da reta que contém:

(a) b^2 ;
(b) $1/b^2$;
(c) $|1 - b|$;
(d) $1/(1 - b)$;
(e) $b/(1 + b)$;
(f) $b^2 + b$

20. Um cubo tem aresta ℓ onde $1{,}14 < \ell < 1{,}15$.

(a) Faça uma estimativa para seu volume ;

(b) Faça uma estimativa para sua área.

21. Uma esfera tem raio r onde $1{,}1 < r < 1{,}2$.

(a) Faça uma estimativa para seu volume ;

(b) Faça uma estimativa para sua área.

22. Um cilindro circular reto sólido tem altura h e raio de base r satisfazendo as seguintes condições:

$$2{,}31 < r < 2{,}32 \text{ e } 3{,}1 < h < 3{,}2\,.$$

(a) Faça uma estimativa para o volume desse sólido ;

(b) Faça uma estimativa para a sua área.

23. Um cone circular reto sólido tem altura h e raio de base r satisfazendo as seguintes condições:

$$2{,}31 < r < 2{,}32 \text{ e } 3{,}1 < h < 3{,}2\,.$$

(a) Faça uma estimativa para o volume desse sólido ;

(b) Faça uma estimativa para a sua área.

24. Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$. Sabendo que $a + 2b > 5$ e que $b - a < 2$ mostre que $2a + b > 3$ e que $a > 1/3$.

25. Sejam $a\,,b\,,c \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$ e $c > a + b$. Pergunta-se: qual o sinal de

(a) c ?

(b) $c - 2a$?

(c) $c^2 - b^2 - a^2$?

(d) $3a - b - c$?

26. Em cada item, determine os inteiros que satisfazem a inequação dada.

(a) $2n^2 < n + 2$;
(b) $n^2 + n > 2n^2 - n - 1$;
(c) $1 + n^2 > 2n^2 - 3n$;
(d) $3n^2 - 2n - 1 > 2n^2 + n$;
(e) $n^3 < n^2 + 3n$

27. Em cada item, determine o maior inteiro m e o menor inteiro n tais que

(a) $m < \sqrt{2} + 2\sqrt{3} < n$;
(b) $m < \sqrt{8} + \sqrt{3} < n$;
(c) $m < \sqrt{11} - \sqrt{2} < n$;
(d) $m < \sqrt{15} - \sqrt{5} < n$;
(e) $m < \sqrt{20} + \sqrt{10}$.

15

Potências

Definição: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Uma *potência* é uma expressão da forma $\boldsymbol{a^b}$ onde $\boldsymbol{a}$ é a *base* da potência e $\boldsymbol{b}$ o *expoente*.

1 Expoentes inteiros

Dado um número real $\boldsymbol{a}$ qualquer temos:
$a^1 := a$
$a^2 := a \times a$
$a^3 := a \times a \times a$
e assim sucessivamente.

Isto é, para cada inteiro positivo n

$$a^n := \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fatores}}$$

Quando $\boldsymbol{a \neq 0}$ definimos $\boldsymbol{a^0 := 1}$. No entanto, **não definimos a potência $\boldsymbol{0^0}$**.

Se $a \neq 0$ então[1] $a^n \neq 0$. Nesse caso, $\dfrac{1}{a^n}$ está bem definido e o denotaremos por a^{-n}.

[1] Isso segue do seguinte fato: se um produto de n números reais se anula então pelo menos um dos fatores se anula. Estudamos essa propriedade na seção 5 da Lição 4.

Precisamente, dado um número real $\boldsymbol{a \neq 0}$ temos:

$a^{-1} := \dfrac{1}{a}$; $a^{-2} := \dfrac{1}{a^2}$; $a^{-3} := \dfrac{1}{a^3}$

e assim sucessivamente.

Isto é, para cada inteiro positivo n

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \ .$$

Repare que as igualdades do quadro anterior não fazem sentido quando $a = 0$. Isso significa que $0^{-1}, 0^{-2}, 0^{-3}, \ldots$ não estão[2] bem definidos.

Exemplos

- ❄ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- ❄ $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
- ❄ $(-\pi)^1 = -\pi$ e $\pi^1 = \pi$
- ❄ $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10000}$
- ❄ $(-\pi)^{-1} = \dfrac{1}{(-\pi)^1} = \dfrac{1}{-\pi} = -\dfrac{1}{\pi}$
- ❄ $(-1)^9 = -1$ e $(-1)^{16} = 1$
- ❄ $0{,}2^3 = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008$
- ❄ $0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$
- ❄ $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
- ❄ $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81} = \dfrac{1}{81}$.

2 Expoentes racionais

Vamos agora revisar as potências da forma $a^{\frac{m}{n}}$ onde $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Comecemos com $a^{\frac{1}{n}}$ onde $n \geq 2$. Ela é dita *raiz n-ésima do número* a e é denotada por $\sqrt[n]{a}$. Nesse caso, dizemos que a é o *radicando* e n é o *radical* ou *índice* da raiz.

2.1 Raízes

Antes de definir raiz de um número real relembramos que elas se enquadram em dois tipos distintos:

☞ raízes de *índice ímpar* como $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[7]{a}$, $\sqrt[9]{a}$, $\sqrt[11]{a}$, ...
que podem ser extraídas qualquer que seja o número real a ;

[2]No entanto, como já vimos: $0^1 = 0$; $0^2 = 0$; $0^3 = 0$ e assim sucessivamente.

☞ raízes de *índice par* como $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[8]{a}$, $\sqrt[10]{a}$, ...
que só podem ser extraídas quando $a \geq 0$.

Raízes de índice ímpar:

Dado um número real $\boldsymbol{a}$ qualquer definimos:

- $\sqrt[3]{a} := b$ quando $b^3 = a$;
  ☞ $\sqrt[3]{216} = 6$ pois, $6^3 = 216 \quad \therefore \quad 216^{\frac{1}{3}} = 6$
- $\sqrt[5]{a} := b$ quando $b^5 = a$;
  ☞ $\sqrt[5]{-1024} = -4$ pois, $(-4)^5 = -1024 \quad \therefore \quad \big(-1024\big)^{\frac{1}{5}} = -4$
- $\sqrt[7]{a} := b$ quando $b^7 = a$;
  ☞ $\sqrt[7]{2187} = 3$ pois, $3^7 = 2187 \quad \therefore \quad 2187^{\frac{1}{7}} = 3$
- $\sqrt[9]{a} := b$ quando $b^9 = a$;
  ☞ $\sqrt[9]{-512} = -2$ pois, $(-2)^9 = -512 \quad \therefore \quad (-512)^{\frac{1}{9}} = -2$

e assim sucessivamente.

Definição: Dados $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{n \geq 3}$ um inteiro *ímpar* então:

$$\sqrt[n]{a} := b \qquad \text{quando} \qquad b^n = a\,.$$

Raízes de índice par:

Dado um número real $\boldsymbol{a \geq 0}$ temos:

- $\sqrt{a} := b$ quando $\boldsymbol{b \geq 0}$ e $b^2 = a$;
  ☞ $\sqrt{49} = 7$ pois, $7 \geq 0$ e $7^2 = 49 \quad \therefore \quad 49^{\frac{1}{2}} = 7$
- $\sqrt[4]{a} := b$ quando $\boldsymbol{b \geq 0}$ e $b^4 = a$;
  ☞ $\sqrt[4]{625} = 5$ pois, $5 \geq 0$ e $5^4 = 625 \quad \therefore \quad 625^{\frac{1}{4}} = 5$
- $\sqrt[6]{a} := b$ quando $\boldsymbol{b \geq 0}$ e $b^6 = a$;
  ☞ $\sqrt[6]{729} = 3$ pois, $3 \geq 0$ e $3^6 = 729 \quad \therefore \quad 729^{\frac{1}{6}} = 3$

- $\sqrt[8]{a} := b$ quando $\boldsymbol{b \geq 0}$ e $b^8 = a$;
  ☞ $\sqrt[8]{256} = 2$ pois, $2 \geq 0$ e $2^8 = 256$ $\therefore$ $256^{\frac{1}{8}} = 2$

e assim sucessivamente.

Definição: Se $\boldsymbol{a \geq 0}$ e $\boldsymbol{n \geq 2}$ é um inteiro *par* temos:

$$\sqrt[n]{a} := b \qquad \text{quando} \qquad b \geq 0 \quad \text{e} \quad b^n = a\,.$$

Lembramos que $\sqrt[n]{a}$ também será denotada por $a^{\frac{1}{n}}$ seja n par ou ímpar.

Exemplos

❄ $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt[3]{0} = 0$; $\sqrt[4]{0} = 0$; $\sqrt[5]{0} = 0$; $\sqrt[6]{0} = 0$; $\sqrt[7]{0} = 0$; ...

❄ $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[4]{1} = 1$; $\sqrt[5]{1} = 1$; $\sqrt[6]{1} = 1$; $\sqrt[7]{1} = 1$; ...

❄ $\sqrt{-1}$ não está bem definida pois não existe um número real b tal que $b^2 = -1$ já que $b^2 \geq 0$.

❄ $\sqrt[4]{-1}$ não está bem definida pois não existe um número real b tal que $b^4 = -1$.

❄ $\sqrt[3]{-1} = -1$; $\sqrt[5]{-1} = -1$; $\sqrt[7]{-1} = -1$; $\sqrt[9]{-1} = -1$; $\sqrt[11]{-1} = -1$; ...

❄ $\sqrt[3]{a^3} = a$; $\sqrt[5]{a^5} = a$; $\sqrt[7]{a^7} = a$; $\sqrt[9]{a^9} = a$; $\sqrt[11]{a^{11}} = a$; ...

❄ $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$; $\left(\sqrt[5]{a}\right)^5 = a$; $\left(\sqrt[7]{a}\right)^7 = a$; $\left(\sqrt[9]{a}\right)^9 = a$; $\left(\sqrt[11]{a}\right)^{11} = a$; ...

❄ $\sqrt{a^2} = |a|$; $\sqrt[4]{a^4} = |a|$; $\sqrt[6]{a^6} = |a|$; $\sqrt[8]{a^8} = |a|$; $\sqrt[10]{a^{10}} = |a|$; ...

☛ Quais são os números reais que elevados ao quadrado produzem a^2 como resultado ? Sabemos que esses números são $a\,, -a\,, |a|$ e $-|a|$. Qual deles é a raiz quadrada de a^2 ? Bem, o único desses números que é **maior ou igual a zero, independentemente do valor de $\boldsymbol{a}$** é $|a|$. Assim, $\sqrt{a^2} = |a|$.

❄ Quando $a \geq 0$ temos que:
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a$; $\left(\sqrt[6]{a}\right)^6 = a$; $\left(\sqrt[8]{a}\right)^8 = a$; $\left(\sqrt[10]{a}\right)^{10} = a$; ...

❄ $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$; $8^{-1/3} = \dfrac{1}{8^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}$; $10^{-1/7} = \dfrac{1}{10^{1/7}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{10}}$.

❄ $(-1)^{-1/2} = \dfrac{1}{(-1)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}}$ que não está bem definida enquanto número real.

❄ $\sqrt{a^4} = a^2$ pois $a^2 \geq 0$ e $(a^2)^2 = a^2 \times a^2 = a^4$.

❄ $\sqrt{a^6} = |a|^3$ pois $|a|^3 \geq 0$ e $(|a|^3)^2 = |a|^3 \times |a|^3 = |a|^6 = a^6$.

Note que a^3 também satisfaz a condição $(a^3)^2 = a^6$, no entanto a^3 pode ser negativo. É o caso, por exemplo quando $a = -1$.

Você deve estar perguntando: *dados um número real positivo e $n \in \mathbb{Z}^+$ será que sempre existe a raiz n-ésima desse número?*

A resposta é **SIM** mas não temos aqui as ferramentas matemáticas necessárias para demonstrá-lo. De fato, tal número não apenas existe, como também é único. Esse fato será utilizado, com freqüência, daqui para frente.

Para raízes de índice ímpar temos as seguintes propriedades.

Dados $a \in \mathbb{R}$ qualquer e $n \geq 3$ um inteiro ímpar, temos:

$$\sqrt[n]{a^n} = a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}\,.$$

Não é difícil provar essas propriedades. A primeira delas é conseqüência da definição de raíz. Para demonstrar a segunda, é suficiente mostrar que elevando à potência n o membro à direita da igualdade obtemos como resultado o número $-a$. Vejamos:

$$\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n = (-1)^n\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (-1)^n a = -a$$

pois n é ímpar.

Essa última propriedade não é verdadeira para potências de índice par. Você pode verificar isso, tomando $n = 2$ e $a = 1$. Para o caso par temos a seguinte propriedade.

Dado $n \geq 2$ um inteiro par, temos:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \;\;,\;\; \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \;\;,\;\; \forall\, a \in [\,0\,,\infty\,)\,.$$

Para potências com expoentes racionais quaisquer faremos a seguinte definição.

Seja p/q com $p\,,q \in \mathbb{Z}^+$ uma fração irredutível. Definimos:

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$$

desde que $\sqrt[q]{a^p}$ esteja bem definida.

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$$

desde que $\sqrt[q]{a^p}$ esteja bem definida e seja não nula.

Note que todo racional não nulo tem uma única fração irredutível que o representa.

Observe que segundo a definição acima, a potência a^r sempre faz sentido quando r é um racional não nulo e a base for um número real positivo. Veremos a seguir que a^r nem sempre faz sentido quando a base é nula ou negativa.

Exemplos

❄ Seja r um *número racional positivo*. Assim, existem $p\,,q \in \mathbb{Z}^+$ primos entre si, tais que $r = p/q$. Logo,

$0^r = 0^{p/q} = \sqrt[q]{0^p} = \sqrt[q]{0} = 0$; $1^r = 1^{p/q} = \sqrt[q]{1^p} = \sqrt[q]{1} = 1$; $1^{-r} = \dfrac{1}{1^r} = 1$.

No entanto,

$(-1)^r = (-1)^{p/q} = \sqrt[q]{(-1)^p}$ que *só não faz sentido* quando q é par e p é ímpar pois nesse caso teríamos uma raíz com índice par de um radicando negativo, o que não faz sentido, enquanto número real.

❄ $4^{3/2} = \sqrt{4^3}$; $2^{-2/3} = \dfrac{1}{2^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$; $5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3}$; $10^{-2/7} = \dfrac{1}{10^{2/7}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{10^2}}$.

❄ $(-4)^{2/3} = \sqrt[3]{(-4)^2} = \sqrt[3]{4^2}$; $(-2)^{-2/5} = \dfrac{1}{(-2)^{2/5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(-2)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^2}}$.

❄ $(-4)^{3/4} = \sqrt[4]{(-4)^3} = \sqrt[4]{-64}$ que não está bem definida.

❄ $5^{2/4} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$.

❄ $(-3)^{4/6} = (-3)^{2/3} = \sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[3]{9}$.

❄ $(-2)^{-6/8} = (-2)^{-3/4} = \dfrac{1}{(-2)^{3/4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(-2)^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{-2^3}}$ que não está bem definida.

❄ $(-1)^{1/q} = \sqrt[q]{-1} = -1$ sempre que q for um inteiro ímpar e positivo.

❄ $(-8)^{4/12} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

☛ Observe que $\sqrt[12]{(-8)^4} = \sqrt[12]{8^4} = \sqrt[12]{(2^3)^4} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$. Isso mostra que $\sqrt[12]{(-8)^4}$ é diferente de $(-8)^{4/12}$ o qual foi acima calculado.

Diante de uma expressão envolvendo termos com raízes de índice par devemos sempre perguntar para quais valores da variável a expressão está bem definida.

Exemplos

❄ $\sqrt{|x|}$ está bem definida $\forall x \in \mathbb{R}$;

❄ $\sqrt[3]{x}$ está bem definida $\forall x \in \mathbb{R}$;

❄ $\sqrt[6]{-x}$ só está bem definida para $x \in (-\infty\,,0\,]$;

❄ $1/\sqrt[5]{x}$ só está bem definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$;

❄ $1/\sqrt[8]{x}$ só está bem definida para $x \in (\,0\,,\infty)$;

❄ $1/\sqrt[7]{|x|}$ está bem definida para $x \in \mathbb{R}^*$.

3 Expoentes irracionais

Agora que acabamos de definir potência com expoente racional, pergunta-se:

☞ *Como definir potência com expoente irracional* ?

Tomando um exemplo específico:

☞ *Como definir* $3^{\sqrt{2}}$?

Ou, pelo menos:

☞ *Como fazer uma estimativa para* $3^{\sqrt{2}}$ *em termos do que já conhecemos* ?

Essa é uma pergunta mais simples para a qual nossa intuição, provavelmente responderia: *Tome uma estimativa racional para* $\sqrt{2}$ *como por exemplo* $1{,}5$. *A potência*

$$3^{1,5} = 3^{\frac{15}{10}} = 3^{3/2} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$$

é um valor aproximado para $3^{\sqrt{2}}$. *Além do mais, quanto melhor for a aproximação usada para* $\sqrt{2}$ *melhor deverá ser a aproximação obtida para* $3^{\sqrt{2}}$!!!

De fato essa é uma forma de definir $3^{\sqrt{2}}$: *por aproximações*. Aproximamos $\sqrt{2}$ por um racional $\frac{m}{n}$ e calculamos $3^{\frac{m}{n}}$ como definido anteriormente. Desta forma obtemos uma aproximação de $3^{\sqrt{2}}$ tão melhor quanto melhor for a aproximação usada para $\sqrt{2}$.

A tabela abaixo exibe algumas aproximações para $3^{\sqrt{2}}$ a partir de aproximações de $\sqrt{2}$ feitas usando o software Mathematica.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242\,1\ldots$$
$$3^{\sqrt{2}} = 4{,}7288043878374149478942833404\,2\ldots$$

Aproximação para $\sqrt{2}$	Aproximação para $3^{\sqrt{2}}$	
$1{,}4$	$3^{1{,}4} = 3^{\frac{7}{5}}$	= 4.655536721746...
$1{,}41$	$3^{1{,}41} = 3^{\frac{141}{100}}$	= 4.706965001716...
$1{,}414$	$3^{1{,}414} = 3^{\frac{1414}{1000}}$	= 4.727695035268...
$1{,}4142$	$3^{1{,}4142} = 3^{\frac{7071}{5000}}$	= 4.728733930171...
$1{,}4142135623$	$3^{1{,}4142135623} = 3^{\frac{14142135623}{10000000000}}$	= 4.728804387457...
$1,414213562373095$	$5^{1{,}414213562373095} = 5^{\frac{1414213562373095}{1000000000000000}}$	= 4.728804387837...

Não vamos apresentar aqui uma definição[3] precisa de potências com expoentes irracionais. O que nós precisamos nesse momento é saber quando tais potências estão bem definidas e, nesse caso, operar com elas. O próximo quadro mostra quando uma potência está bem definida.

[3]Você pode encontrar isso em .....

Quando $(base)^{expoente}$ está bem definido ?	
Base positiva	
$(base\ positiva)^{expoente\ qualquer}$	está bem definido, é > 0 e $1^{expoente\ qualquer} = 1$ $(base\ positiva)^0 = 1$
Base nula	
$0^{expoente\ positivo}$	está sempre bem definido e vale 0
0^0	não está bem definido
$0^{expoente\ negativo}$	não está bem definido
Base negativa	
$(base\ negativa)^{expoente\ inteiro}$	está sempre bem definido
$(base\ negativa)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(base\ negativa)^m}$	só não está bem definido quando m é ímpar e n é par, onde $m\,,n \in \mathbb{Z}^+$ são primos entre si.
$(base\ negativa)^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{(base\ negativa)^m}}$	só não está bem definido quando m é ímpar e n é par, onde $m\,,n \in \mathbb{Z}^+$ são primos entre si.
$(base\ negativa)^{expoente\ irracional}$	não está bem definido

4 Como operar com potências

Para potências com bases e expoentes reais temos as seguintes propriedades, que são válidas desde que cada uma das potências e frações envolvidas estejam bem definidas.

$$x^a \times x^b = x^{a+b} \quad ; \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \frac{y^a}{x^a}$$
$$(x \times y)^a = x^a \times y^a$$

Note que, como dissemos antes, ao escrevemos $x^a \times x^b = x^{a+b}$ estamos de fato afirmando: se x^a faz sentido, se x^b faz sentido e se x^{a+b} faz sentido então $x^a \times x^b = x^{a+b}$.

É dessa forma que devemos entender todas as outras igualdades no quadro acima. Além disso temos a seguinte regra:

$$\big(x^a\big)^b = x^{a\times b} = \big(x^b\big)^a$$

que deve ser entendida da seguinte forma: se as potências das extremidades estão bem definidas então a do meio também está e, nesse caso, as três são iguais.

Exemplos

- $5^2 \times 5^{\pi-2} = 5^{2+\pi-2} = 5^\pi$
- $(2\times\pi)^{3,2} = 2^{3,2}\times\pi^{3,2}$
- $0{,}3^5 \times 0{,}3^{-3} = 0{,}3^2$
- $12^{\frac{1}{2}} = \big(2^2\times 3\big)^{\frac{1}{2}} = \big(2^2\big)^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}} = 2\times 3^{\frac{1}{2}}$
- $\left(\dfrac{2}{15}\right)^{-3} = \dfrac{2^{-3}}{15^{-3}} = \dfrac{15^3}{2^3} = \left(\dfrac{15}{2}\right)^3$
- $\dfrac{0{,}3^\pi}{0{,}3^2} = 0{,}3^{\pi-2}$
- $\big(0{,}21\times 3{,}1\big)^{1,2} = 0{,}21^{1,2}\times 3{,}1^{1,2}$
- $\big(5^2\big)^{0,1} = 5^{2\times 0,1} = 5^{0,2} = 5^{\frac{1}{5}}$
- $4^{\frac{3}{2}} = \big(2^2\big)^{3/2} = 2^{2\times\frac{3}{2}} = 2^3.$
- $4^{2,5} = \big(2^2\big)^{2,5} = 2^{2\times 2,5} = 2^5 = 32$
- $(2\times 3)^{3,2} = 2^{3,2}\times 3^{3,2}$
- $(2\times x)^{3,2} = 2^{3,2}\times x^{3,2}$
- $\big(5^2\big)^\pi = 5^{2\pi} = 25^\pi$
- $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^5 = \dfrac{3^5}{\big(2^{\frac{1}{2}}\big)^5} = 3^5\times 2^{-\frac{5}{2}}$
- $\left(x^{\sqrt{3}}\right)^{-\pi} = x^{-\pi\sqrt{3}} = \dfrac{1}{x^{\pi\sqrt{3}}}$
- $\dfrac{(2\times 3)^3}{3^3} = \dfrac{2^3\times 3^3}{3^3} = 2^3.$
- $2^{1/2}\times 6^{3/2} = 2^{1/2}\times\big(2\times 3\big)^{3/2} = 2^{1/2}\times 2^{3/2}\times 3^{3/2} = 2^{4/2}\times 3^{3/2} = 2^2\times 3^{\frac{3}{2}}.$
- $\dfrac{\big(6^2\big)^{3/4}\times 2^{-1/2}}{3^{3/2}} = \dfrac{\big(2^2\times 3^2\big)^{3/4}\times 2^{-1/2}}{3^{3/2}} = \dfrac{2^{3/2}\times 3^{3/2}\times 2^{-1/2}}{3^{3/2}} = 2^{2/2} = 2\,.$
- $\dfrac{\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{6^{1/3}\times 9^{1/3}}{2^{1/3}} = \dfrac{2^{1/3}\times 3^{1/3}\times 3^{2/3}}{2^{1/3}} = 3^{3/3} = 1\,.$
- $\sqrt{18}\times\sqrt{2} = \sqrt{2\times 3^2}\times\sqrt{2} = 3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 3\times 2 = 6\,.$
- $3^{-\sqrt{2}}\times\big(3^2\big)^{\sqrt{2}} = 3^{-\sqrt{2}}\times 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}.$
- $\dfrac{\big(\sqrt{2}\big)^{7/2}\times\sqrt[4]{2}}{2^{1-\pi}} = \dfrac{\big(2^{1/2}\big)^{7/2}\times 2^{1/4}}{2^{1-\pi}} = \dfrac{2^{7/4}\times 2^{1/4}}{2^{1-\pi}} = \dfrac{2^{8/4}}{2\times 2^{-\pi}} = \dfrac{2^2}{2\times 2^{-\pi}} = 2^{2-1+\pi} = 2^{\pi+1}.$

❄ $\dfrac{3^{\sqrt{3}} \times 6^{2-\sqrt{3}}}{2^{1-\sqrt{3}}} = \dfrac{3^{\sqrt{3}} \times \big(2 \times 3\big)^{2-\sqrt{3}}}{2^{1-\sqrt{3}}} = \dfrac{3^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} \times 3^{2-\sqrt{3}}}{2^{1-\sqrt{3}}} = \dfrac{3^2 \times 2^{2-\sqrt{3}}}{2^{1-\sqrt{3}}} = 3^2 \times 2^1 = 18\,.$

❄ $\big((-1)^2\big)^{1/2}$ está bem definido mas, $\big((-1)^{1/2}\big)^2$ não está. Repare que nesse caso, a potência $(-1)^{2\times\frac{1}{2}}$ está bem definida e vale -1. No entanto, $\big((-1)^2\big)^{1/2}$ e $(-1)^{2\times\frac{1}{2}}$ não são iguais.

5 Uma convenção

Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ a expressão x^x está bem definida ? Isto é, qual o domínio de defnição da expressão x^x ?

Seguindo a tabela que descreve quando uma potência está bem definida, podemos afirmar:

☞ x^x *está bem definido para todo* $x > 0$;

☞ x^x *não está definido para* $x = 0$;

☞ x^x *não está bem definido quando* x *é um irracional negativo* .

Mas para valores de x que são *racionais e negativos* podemos ainda concluir:

☞ x^x *está bem definido quando* $x < 0$ *é uma fração irredutível com numerador par*[4] e nesse caso x^x é positivo ;

☞ x^x *também está bem definido quando* $x < 0$ *é uma fração irredutível com numerador ímpar e denominador ímpar* e nesse caso x^x é negativo ;

☞ No entanto, x^x *não está bem definido* quando $x < 0$ é uma fração irredutível com numerador ímpar e denominador par pois nesse caso, temos uma expressão do tipo

$$\Big(-\frac{p}{q}\Big)^{-\frac{p}{q}} = 1\Big/\Big(-\frac{p}{q}\Big)^{\frac{p}{q}} = 1\Big/\sqrt[q]{\Big(-\frac{p}{q}\Big)^p} = 1\Big/\sqrt[q]{-\Big(\frac{p}{q}\Big)^p}$$

onde $p\,, q \in \mathbb{Z}^+$, são primos entre si, p é ímpar e q é par, qual não está bem definida equanto número real.

Apesar disso, no curso de Cálculo I você aprendeu que o domínio de definição dessa expressão é o intervalo $(\,0\,,\infty)$. Esse é de fato o subconjunto da reta onde a expressão x^x varia continuamente.

[4] . . . e consequentemente, denominador ímpar.

Convencionamos aqui que o domínio da expressão x^x é o intervalo $(0\,,\infty)$. Mais geralmente, faremos a seguinte convenção.

Numa expressão da forma $\Big(E(x)\Big)^{F(x)}$ *se o expoente* $F(x)$ *assume valores racionais e irracionais, entenderemos que o domínio da expressão são os valores reais da variável* x *para os quais a potência está bem definida e* **tem base positiva ou nula**.

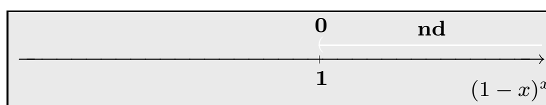
Exemplos

❄ Domínio de x^{2x} :

A expressão está bem definida para $x > 0$. Por outro lado, o expoente assume valores racionais e irracionais. Portanto, segundo a convenção feita, segue que o domínio de definição da expressão é o intervalo $(0\,,\infty)$.

❄ Domínio de $(1-x)^x$:

O expoente assume valores racionais e irracionais. Assim, para a base $1-x$ devemos ter $1-x \geq 0$ ou seja, para $x \leq 1$. Além dissso, temos que em $x = 1$ a base se anula e o expoente vale 1. Logo, a potência também está bem definida para $x = 1$. Portanto, seu domínio é o intervalo $(-\infty\,,1\,]$.



❄ Domínio de $(4-x^2)^{\frac{1}{x-1}}$:

Novamente, o expoente assume valores racionais e irracionais.

Para que a base seja positiva ou nula, devemos ter:

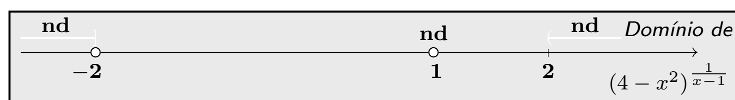
$$4-x^2 \geq 0 \iff x^2-4 \leq 0 \iff x \in [-2\,,2\,]\,.$$

Para que o expoente esteja bem definido, devemos ter $x \neq 1$.

Além disso:

- ☞ quando $x = 2$ a base se anula mas o expoente vale 1, o que significa que a expressão em estudo está bem definida em $x = 1$;
- ☞ quando $x = -2$ a base se anula e o expoente vale -1, o que significa que a expressão em estudo não está bem definida em $x = 1$.

Assim, o domínio da expressão é $(-2\,,1\,) \cup (\,1\,,2\,]$.



Exercícios resolvidos

1. Simplifique as expressões

(a) $\frac{2^5}{6^6}$ **(b)** $\left(-\frac{2}{1{,}5}\right)^3$ **(c)** $\frac{10^4 \times 4^3}{2^5 \times 5^2}$ **(d)** $\frac{0{,}2^5 \times 0{,}6^4}{3^4 \times 2^3}$.

Solução Temos que:

(a) $\frac{2^5}{6^6} = \frac{2^5}{(2 \times 3)^6} = \frac{2^5}{2^6 \times 3^6} = \frac{1}{2 \times 3^6}$.

(b) $\left(-\frac{2}{1{,}5}\right)^3 = \left((-1) \times \frac{2}{1{,}5}\right)^3 = (-1)^3 \times \left(\frac{2}{1{,}5}\right)^3 = -\left(\frac{2 \times 10}{15}\right)^3 = -\left(\frac{2 \times 2}{3}\right)^3 = -\frac{2^6}{3^3}$.

(c) $\frac{10^4 \times 4^3}{2^5 \times 5^2} = \frac{(2 \times 5)^4 \times (2^2)^3}{2^5 \times 5^2} = \frac{2^4 \times 5^4 \times 2^6}{2^5 \times 5^2} = \frac{2^{10} \times 5^4}{2^5 \times 5^2} = 2^{10-5} \times 5^{4-2} = 2^5 \times 5^2$.

(d) $\frac{0{,}2^5 \times 0{,}6^4}{3^4 \times 2^7} = \frac{0{,}2^5 \times (3 \times 0{,}2)^4}{3^4 \times 2^7} = \frac{0{,}2^9 \times 3^4}{3^4 \times 2^7} = \frac{(2 \times 0{,}1)^9}{2^7} = 2^2 \times 0{,}1^9 = 2^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^9 = \frac{2^2}{10^9}$.

2. Coloque as expressões a seguir na forma de uma fração irredutível.

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ **(b)** $-(-4)^{-2}$ **(c)** $\frac{5^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}}$ **(d)** $\frac{3^5 \times \left(15^{-2}\right)^3}{(10^{-3})^2 \times 2^5}$.

Solução Temos que:

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$.

(b) $-(-4)^{-2} = -\frac{1}{(-4)^2} = -\frac{1}{16}$.

(c) $\frac{5^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}} = 5^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{5^2 \times 2^3}{5^3} = \frac{2^3}{5^{3-2}} = \frac{8}{5}$.

(d) $\frac{3^5 \times \left(15^{-2}\right)^3}{(10^{-3})^2 \times 2^5} = \frac{3^5 \times \left(3^{-2} \times 5^{-2}\right)^3}{(2^{-3} \times 5^{-3})^2 \times 2^5} = \frac{3^5 \times 3^{-6} \times 5^{-6}}{2^{-6} \times 5^{-6} \times 2^5} = \frac{3^{-1} \times 5^{-6} \times 5^6}{2^{-1}} = \frac{2}{3}$.

3. Use as regras para operar com potência e conclua que:

(a) $\sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$ **(b)** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ **(c)** $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

quando cada uma das potências envolvidas estão bem definidas, e onde m e n são inteiros maiores ou iguais a dois.

Solução Nesse caso, usando as regras para operar com potências, obtemos:

(a) $\sqrt[n]{x \times y} = (x \times y)^{1/n} = x^{1/n} \times y^{1/n} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$.

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}}$$

(b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \left((x)^{1/n}\right)^{1/m} = (x)^{1/mn} = \sqrt[mn]{x}$.

$$\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}}$$

(c) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/n} = \dfrac{x^{1/n}}{y^{1/n}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}}$$

☛ **Atenção:** As três igualdades que acabamos de estudar são verdadeiras desde que cada uma das potências e frações envolvidas estejam bem definidas. Nós usamos essa hipótese ao demonstrá-las pois fizemos isso usando as propriedades listadas no quadro anterior.

4. **Simplifique $4\sqrt{12} + 3\sqrt{75}$.**

Solução Temos que: $4\sqrt{12} + 3\sqrt{75} = 4\sqrt{2^2 \times 3} + 3\sqrt{5^2 \times 3} = 4 \times 2\sqrt{3} + 3 \times 5\sqrt{3} = 23\sqrt{3}$.

5. **Escreva a expressão $\left(2x + y^{-2}\right)^{-1}$ sem usar expoentes negativos e simplifique-a.**

Solução Aqui estaremos assumindo que $y \neq 0$ e que $2x + y^{-2} \neq 0$ para que a expressão a ser estudada faça sentido.

Nesse caso temos: $\left(2x + y^{-2}\right)^{-1} = \left(2x + \dfrac{1}{y^2}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2x + \dfrac{1}{y^2}}$.

Além disso: $\dfrac{1}{2x + \dfrac{1}{y^2}} = \dfrac{1}{\dfrac{2\,x\,y^2 + 1}{y^2}} = \dfrac{y^2}{1 + 2xy^2}$. Assim, $\left(2x + y^{-2}\right)^{-1} = \dfrac{y^2}{1 + 2xy^2}$.

6. **Simplifique a expressão $\sqrt{x}\left(\sqrt{2x} - \sqrt{x}\right)$.**

Solução Para que a expressão faça sentido devemos considerar que $x \geq 0$. Nesse caso, temos:

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{2x} - \sqrt{x}\right) = \sqrt{x}\,\sqrt{2x} - \sqrt{x}\,\sqrt{x} = \sqrt{2x^2} - \sqrt{x^2} = |x|\sqrt{2} - |x| = (\sqrt{2} - 1)\,|x| = (\sqrt{2} - 1)\,x$$

pois $x \geq 0$.

7. **Em cada item determine o maior subconjunto da reta no qual a igualdade dada é verdadeira.**

(a) $\sqrt{x^2} = -x$ **(b)** $\sqrt{x^4} = x^2$ **(c)** $\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[4]{x^3}$ **.**

Solução

(a) Vimos que $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a igualdade proposta só é verdadeira para $x \leq 0$. Assim, o subconjunto procurado é o intervalo $(-\infty\,, 0]$.

(b) $\sqrt{x^4} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{x^2} = |x|\,|x| = |x|^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, o subconjunto procurado é $\mathbb{R}$.

(c) A expressão do lado direito da igualdade não faz sentido quando $x < 0$. No entanto, a igualdade é veradeira para $x \geq 0$ pois nesse caso temos: $\sqrt[8]{x^6} = x^{6/8} = x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$.

8. **Qual é o domínio de definição da expressão $\sqrt{x^2 - 2x}$?**

Solução A expressão só estará bem definida quando $x^2 - 2x \geq 0$. Assim, para responder a pergunta devemos analizar o sinal da expressão $x^2 - 2x$ cujos zeros são:

$x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.

Da regra de sinais para o trinômio do segundo grau concluímos que a distribuição de sinais é a seguinte:

sinal de $x^2 - 2x$	$+ + + + + + + + + +$	**0**	$- - - - - -$	**0**	$+ + + + + + +$
x		**0**		**2**	

O estudo dos sinais da expressão $x^2 - 2x$ nos garante que

$$x^2 - 2x \geq 0 \iff x \in (-\infty\,,0\,] \cup [\,2\,,\infty)\,.$$

Portanto, o domínio de $\sqrt{x^2 - 2x}$ é $(-\infty\,,0\,] \cup [\,2\,,\infty)$.

9. **Quanto vale $(-1)^n$ quando n é um inteiro positivo ?**

Solução Consideremos separadamente os casos n par e n ímpar.

Quando n é par temos: $(-1)^n = \underbrace{(-1) \times \cdots \times (-1)}_{\textit{número par de fatores}} = 1\,.$

Quando n é ímpar temos: $(-1)^n = \underbrace{(-1) \times \cdots \times (-1)}_{\textit{número ímpar de fatores}} = -1\,.$

10. **Determine o domínio de definição da expressão $\dfrac{2^3 \times x^{-2}}{(2x-2)^2}$ e simplifique-a.**

Solução A expressão só não está bem definida

☞ em $x = 0$ pois, nesse caso, x^{-2} não está bem definido ;

☞ quando o denominador da fração se anula, ou seja, quando
$(2x-2)^2 = 0 \iff 2x = 2 \iff x = 1\,.$

Portanto, o domínio da expressão é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\,,1\}$.

Para $x \in \mathbb{R} - \{0\,,1\}$ podemos simplificar a expressão e obtemos:

$$\frac{2^3 \times x^{-2}}{(2x-2)^2} = \frac{2^3}{x^2 \times 2^2(x-1)^2} = \frac{2}{x^2(x-1)^2}\,.$$

11. Para quais valores da variável x a expressão $2\,x^{-1} \times (x+1)^{-3}$ não está bem definida ?

Solução A expressão só não está bem definida quando

☞ $x = 0$, pois nesse caso x^{-1} não está bem definido ;

☞ $x = -1$, pois nesse caso $(x+1)^{-3}$ não está bem definido .

12. Simplifique[5] a expressão $\left(\frac{1}{|x|} + 1\right)^{-1} \frac{y}{(1+|x|)^{-2}}$.

Solução Temos que

$$\left(\frac{1}{|x|} + 1\right)^{-1} \frac{y}{(1+|x|)^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{|x|}+1} \times \frac{y}{\frac{1}{(1+|x|)^2}} = \frac{|x|\,y\,(1+|x|)^2}{1+|x|} = y\,|x|\,(1+|x|)$$

desde que $x \neq 0$.

13. Use as regras para operar com potências e simplifique as expressões a seguir:

(a) $\sqrt{2^2 \times 5^3}$ **(b)** $\sqrt[3]{6} \times \sqrt{6}$ **(c)** $25^{1,5}$ **(d)** $\sqrt[4]{4^3 \times 6^5}$ **(e)** $200^{-0,6}$.

Solução Seguindo as regras para operar com potências, obtemos:

(a) $\sqrt{2^2 \times 5^3} = \left(2^2 \times 5^2 \times 5\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5 \times 5^{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{5}$.

(b) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt{6} = 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 6^{\frac{5}{6}} = \frac{6^{\frac{5}{6}} \times 6^{\frac{1}{6}}}{6^{\frac{1}{6}}} = \frac{6^{\frac{6}{6}}}{6^{\frac{1}{6}}} = \frac{6}{\sqrt[6]{6}}$.

(c) $25^{1,5} = \left(5^2\right)^{1,5} = 5^{2\times 1,5} = 5^3 = 125$.

(d) $\sqrt[4]{4^3 \times 6^5} = \left(2^6 \times 2^5 \times 3^5\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{12} \times 2^{-1} \times 3^4 \times 3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{12}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{4}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} = \frac{2^3 \times 3 \times \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}}$.

(e) $200^{-0,6} = \left(2^3 \times 5^2\right)^{-\frac{6}{10}} = \frac{1}{\left(2^3 \times 5^2\right)^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{2^{\frac{9}{5}} \times 5^{\frac{6}{5}}} = \frac{2^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{10}{5}} \times 5^{\frac{5}{5}} \times 5^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{2^2 \times 5 \times \sqrt[5]{5}}$.

14. Determine o valor das expressões

(a) $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}}$ **(b)** $\frac{4^{5/4} \times \sqrt{1000}}{5^{5/2}}$ **(c)** $\frac{12^{-2/3} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^{-1}}}$ **(d)** $\frac{\sqrt{1,2} \times 0,3^{1/3}}{\sqrt{0,3} \times \sqrt[3]{0,6}}$.

Solução

[5] Num exercício como esse, estamos admitindo que a variável assume apenas os valores para os quais a expressão e as operações sobre ela efetuadas estão bem definidas.

(a) $\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{2^{1/2}\times\left(2^2\right)^{1/3}}{2^{1/6}}=\dfrac{2^{1/2}\times 2^{2/3}}{2^{1/6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=2\,,$ pois $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{3+4-1}{6}=1\,.$

(b) $\dfrac{4^{5/4}\times\sqrt{1000}}{5^{5/2}}=\dfrac{\left(2^2\right)^{\frac{5}{4}}\times\left(10^3\right)^{\frac{1}{2}}}{5^{5/2}}=\dfrac{2^{5/2}\times 10^{3/2}}{5^{5/2}}=\dfrac{2^{5/2}\times 2^{3/2}\times 5^{3/2}}{5^{5/2}}=\dfrac{2^4}{5^{2/2}}=\dfrac{2^4}{5}\,.$

(c) $\dfrac{12^{-2/3}\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^{-1}}}=\dfrac{\left(2^2\times 3\right)^{-2/3}\times 3^{1/3}}{\left(2^{-1}\right)^{1/3}}=\dfrac{2^{-4/3}\times 3^{-2/3}\times 3^{1/3}}{2^{-1/3}}=\dfrac{3^{-1/3}}{2^{3/3}}=\dfrac{1}{2\times 3^{1/3}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{3}}\,.$

(d) $\dfrac{\sqrt{1,2}\times 0,3^{1/3}}{\sqrt{0,3}\times\sqrt[3]{0,6}}=\dfrac{\sqrt{2^2\times 0,3}\times 0,3^{1/3}}{\sqrt{0,3}\times\left(2\times 0,3\right)^{1/3}}=\dfrac{2\times\sqrt{0,3}\times 0,3^{1/3}}{\sqrt{0,3}\times 2^{1/3}\times 0,3^{1/3}}=\dfrac{2}{2^{1/3}}=2^{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}}=2^{2/3}=\sqrt[3]{4}\,.$

15. Determine o domínio de definição das expressões

(a) $\sqrt{x+1}$ **(b)** $\sqrt[4]{1+|x|}$ **(c)** $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$ **(d)** $\dfrac{\sqrt{2-|x|}}{1+x}$.

Solução

(a) A expressão só estará bem definida quando $x+1\geq 0$, isto é, quando $x\geq -1$. Assim, o domínio de definição da expressão será o intervalo $[-1\,,\infty)$.

(b) Essa expressão está bem definida para todo x real pois $1+|x|$ é sempre positivo. Logo, o domínio da expressão é a reta $\mathbb{R}$.

(c) Sabemos que $\sqrt[3]{x+1}$ está bem definida para todo $x\in\mathbb{R}$. Além disso,

$$\sqrt[3]{x+1}=0 \iff x+1=0 \iff x=-1\,.$$

Consequentemente, o domínio da expressão do item (c) será $(-\infty\,,-1\,)\cup(-1\,,\infty)$.

(d) Para que o numerador da fração esteja bem definido, devemos ter:

$$2-|x|\geq 0 \iff 2\geq |x| \iff |x|\leq 2 \iff x\in[-2\,,2\,]\,.$$

Além disso, o denominador da fração não pode se anular, ou seja, $x\neq -1$. Concluímos então que o domínio da expressão será o conjunto

$$[-2\,,2\,]-\{-1\}=[-2\,,-1\,)\cup(-1\,,2\,]\,.$$

16. Use as regras para operar com potências e simplifique as expressões a seguir.

(a) $\dfrac{3^4\times 5^3}{15^4}$ **(b)** $\dfrac{2^5\times\left(9^2\right)^{\frac{1}{3}}}{6^4\times 12^{-5}}$ **(c)** $\dfrac{0,2^{-3}\times 0,1^5}{2^{-6}\times 4^2}$ **(d)** $\dfrac{10^5\times 10^{2\pi-3}}{100^{1+\pi}}$.

Solução

(a) $\dfrac{3^4\times 5^3}{15^4}=\dfrac{3^4\times 5^3}{(3\times 5)^4}=\dfrac{3^4\times 5^3}{3^4\times 5^4}=\dfrac{1}{5^{4-3}}=\dfrac{1}{5}\,.$

(b) $\dfrac{2^5 \times (9^2)^{\frac{1}{3}}}{6^4 \times 12^{-5}} = \dfrac{2^5 \times 9^{\frac{2}{3}}}{2^4 \times 3^4 \times 4^{-5} \times 3^{-5}} = \dfrac{2 \times (3^2)^{2/3}}{3^{-1} \times (2^2)^{-5}} = \dfrac{2 \times 3^{\frac{4}{3}} \times 3}{2^{-10}} = 2^{11} \times 3^{\frac{7}{3}}.$

(c) $\dfrac{0,2^{-3} \times 0,1^5}{2^{-6} \times 4^2} = \dfrac{(2 \times 0,1)^{-3} \times 0,1^5}{2^{-6} \times (2^2)^2} = \dfrac{2^{-3} \times 0,1^2}{2^{-6} \times 2^4} = \dfrac{0,1^2}{2^{-6} \times 2^7} = \dfrac{0,1^2}{2} = \dfrac{0,01}{2} = 0,005\,.$

(d) $\dfrac{10^5 \times 10^{2\pi-3}}{100^{1+\pi}} = \dfrac{10^{2\pi+2}}{(10^2)^{1+\pi}} = \dfrac{10^{2\pi+2}}{10^{2+2\pi}} = 1.$

17. Coloque sob um mesmo radical as seguintes expressões:

(a) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{2}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[5]{3}}$ **(c)** $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ **(d)** $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}$ **(e)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}}$**.**

Solução Temos que:

(a) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}\,.$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[5]{3}} = 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{5}} = 3^{(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})} = 3^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{3}\,.$

(c) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \left(2\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[3]{2^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((2^4)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2^4}\,.$

(d) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} \times 3^{\frac{2}{6}} = (2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2^3 \times 3^2}\,.$

(e) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}} = \dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{3^{\frac{4}{12}}}{4^{\frac{3}{12}}} = \left(\dfrac{3^4}{4^3}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^4}{4^3}}\,.$

18. Use as regras para operar com potências e simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{y^2 \times y^{-1}}{y^3}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^{0,1}$ **(c)** $\dfrac{x^{2\pi}}{(xy)^{\pi-1}}$ **(d)** $\left(\dfrac{y^2}{\pi^3}\right)^x \times \left(\dfrac{\pi^x}{y^{3x}}\right)^2$**.**

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{y^2 \times y^{-1}}{y^3} = y^2 \times y^{-1} \times y^{-3} = y^{-2} = \dfrac{1}{y^2}.$

(b) $\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^{0,1} = \dfrac{y^{0,1}}{(x^2)^{0,1}} = y^{0,1} \times x^{-0,2} = \sqrt[10]{y} \times \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\,.$

(c) $\dfrac{x^{2\pi}}{(xy)^{\pi-1}} = \dfrac{x^{2\pi}}{x^{\pi-1} \times y^{\pi-1}} = x^{2\pi} \times x^{1-\pi} \times y^{1-\pi} = x^{1+\pi} \times y^{1-\pi}$

(d) $\left(\dfrac{y^2}{\pi^3}\right)^x \times \left(\dfrac{\pi^x}{y^{3x}}\right)^2 = \dfrac{y^{2x}}{\pi^{3x}} \times \dfrac{\pi^{2x}}{y^{6x}} = \dfrac{1}{\pi^{3x-2x} \times y^{6x-2x}} = \dfrac{1}{\pi^x \times y^{4x}}\,.$

19. Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{2^5 \times \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{6^4 \times 3^{-5}}$ **(b)** $\dfrac{2^{2x} \times 10^x}{20^x}$ **(c)** $\dfrac{\left(2\pi\right)^{1-x} \times 4^x}{\pi \times 2^{x-4}}$ **(d)** $\dfrac{x^{2(x+1)}}{(2x)^x + 2^x}$.

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{2^5 \times \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{6^4 \times 3^{-5}} = \dfrac{2^5 \times x^{\frac{2}{3}}}{2^4 \times 3^4 \times 3^{-5}} = \dfrac{2^{5-4} \times x^{\frac{2}{3}}}{3^{-5+4}} = \dfrac{2x^{\frac{2}{3}}}{3^{-1}} = 6x^{\frac{2}{3}}$.

(b) $\dfrac{2^{2x} \times 10^x}{20^x} = \dfrac{2^{2x} \times (2 \times 5)^x}{(2^2 \times 5)^x} = \dfrac{2^{2x} \times 2^x \times 5^x}{\left(2^2\right)^x \times 5^x} = \dfrac{2^{2x} \times 2^x \times 5^x}{2^{2x} \times 5^x} = 2^x$.

(c) $\dfrac{\left(2\pi\right)^{1-x} \times 4^x}{\pi \times 2^{x-4}} = \dfrac{2^{1-x} \times \pi^{1-x} \times \left(2^2\right)^x}{\pi \times 2^{x-4}} = \dfrac{2^{1-x} \times 2^{2x}}{\pi^x \times 2^{x-4}} = \dfrac{2^{x+1}}{\pi^x \times 2^{x-4}} = \dfrac{2^{x+1-x+4}}{\pi^x} = \dfrac{2^5}{\pi^x}$.

(d) $\dfrac{x^{2(x+1)}}{(2x)^x + x^{2x}} = \dfrac{x^{2x} \times x^2}{(2x)^x + x^{2x}} = \dfrac{x^{2x} \times x^2}{2^x x^x + x^{2x}} = \dfrac{x^{2x} \times x^2}{x^x(2^x + x^x)} = \dfrac{x^{2x-x} \times x^2}{2^x + x^x} = \dfrac{x^{x+2}}{2^x + x^x}$.

20. Descreva o domínio das expressões a seguir e escreva-as usando radicais.

(a) $x^{0,1}$ **(b)** $x^{1,2}$ **(c)** $(2-x)^{3,5}$ **(d)** $\dfrac{x}{(x+1)^{\sqrt{2}}}$.

Solução Nos três primeiros itens, os expoentes são números racionais e podem ser colocados sob a forma:

(a) $x^{0,1} = x^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{x}$.

Portanto, o domínio da expressão é o intervalo $[0, \infty)$.

(b) $x^{1,2} = x^{\frac{12}{10}} = x^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{x^6} = \sqrt[5]{x^5 \times x} = x\sqrt[5]{x}$.

Assim, o domínio da expressão é $\mathbb{R}$.

(c) $(2-x)^{3,5} = (2-x)^{\frac{35}{10}} = (2-x)^{\frac{7}{2}} = \sqrt{(2-x)^7} = (2-x)^3\sqrt{2-x}$.

Concluímos então que o domínio da expressão é $\{x \in \mathbb{R}\,;\ 2 \geq x\} = (-\infty, 2]$.

(d) Nesse caso o expoente é irracional, logo a potência $(x+1)^{\sqrt{2}}$ só estará bem definida para $x+1 \geq 0$, ou seja, para $x \geq -1$. No entanto, para que o denominador da expressão não se anule, precisamos da condição $x > -1$. Assim, o domínio da expressão é o intervalo $(-1, \infty)$.

21. Para quais valores da variável x a expressão $(2-x)^{1,1717\ldots}$ está bem definida ?

Solução Para responder essa pergunta vamos, primeiramente, determinar a fração irredutível que é *geratriz* da dízima periódica $1,1717\ldots$

Para isso, seja $z = 1,1717\ldots$

Assim, $100\,z = 117,1717\ldots$ e teremos:

$$100\,z - z = 117,1717\ldots - 1,1717\ldots = 117 + 0,1717\ldots - 1 - 0,1717\ldots = 117 - 1 = 116.$$

Resulta daí que

$$99\,z = 116 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{116}{99} = \frac{2^2 \times 29}{3^2 \times 11}.$$

Portanto, a fração irredutível que é geratriz da dízima em questão é a fração $116/99$. Nesse caso, a expressão $(2-x)^{1,1717\ldots}$ toma a forma

$$(2-x)^{1,1717\ldots} = (2-x)^{116/99} = \sqrt[99]{(2-x)^{116}}$$

a qual está bem definida para todos os valores reais da variável x já que o índice da raiz na expressão acima é ímpar. Assim sendo, a expressão $(2-x)^{1,1717\ldots}$ está bem definida em toda a reta $\mathbb{R}$.

22. Estude o sinal da expressão $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}$.

Solução Para isso, começamos o estudo determinando onde a expressão está bem definida.

☞ A expressão só está bem definida para $x \neq 3$ e $x \geq 0$. Assim, seu domínio será $[\,0\,,3\,)\cup(\,3\,,\infty)$.

☞ A expressão se anula quando

$$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}=0 \implies \sqrt{x}=\sqrt[3]{x} \implies x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}} \implies x^{\frac{6}{2}}=x^{\frac{6}{3}} \implies x^3=x^2$$
$$\implies x^3-x^2=0 \implies x^2(x-1)=0 \implies x=0 \text{ ou } x=1\,.$$

Testando esses dois valores na equação inicial, concluímos que ambos são, de fato, soluções. Assim, a expressão em estudo só se anula no conjunto $\{0\,,1\}$. Seu domínio é mostrado no diagrama ao lado.

nd	0		nd	*domínio de*
	0	1	3	$(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})/(x-3)$

Sinal da expressão $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}$:

Vamos usar aqui a técnica descrita na Lição 11 que pressupõe a *continuidade* da expressão acima em seu domínio de definição. Num curso de Cálculo I você verá que é fácil mostrar que a expressão acima é de fato contínua em todo o seu domínio de definição.

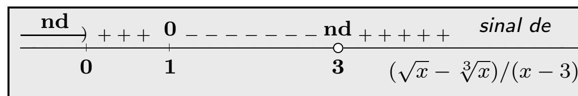
☞ Teste de sinal em $(\,0\,,1\,)$:
Em $x=2^{-6}\in(\,0\,,1\,)$ temos:

$$\left.\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}\right|_{x=2^{-6}} = \frac{\sqrt{2^{-6}}-\sqrt[3]{2^{-6}}}{2^{-6}-3} = \frac{2^{-3}-2^{-2}}{2^{-6}-3} = \frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^6}-3} > 0\ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(\,1\,,3\,)$:
Em $x=2\in(\,1\,,3\,)$ temos:

$$\left.\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}\right|_{x=2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{2-3} = \sqrt[3]{2}-\sqrt{2} < 0\ (-).$$

- Teste de sinal em $(3,\infty)$:
  Em $x=2^6\in(3,\infty)$ temos:
  $$\left.\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}\right|_{x=2^6}=\frac{\sqrt{2^6}-\sqrt[3]{2^6}}{2^6-3}=\frac{2^3-2^2}{2^6-3}>0\ (+)\,.$$



Finalizando a análise de sinais da expressão $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}$, concluímos:

- Seu domínio é: $[0,3)\cup(3,\infty)$;
- Ela se anula em $\{0,1\}$;
- É positiva em: $(0,1)\cup(3,\infty)$;
- É negativa em: $(1,3)$.

23. Resolva a inequação $\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}\geq 2$.

Solução Para isso, vamos analizar o sinal da expressão $\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2$.

Estudando o sinal da expressão $\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2$:

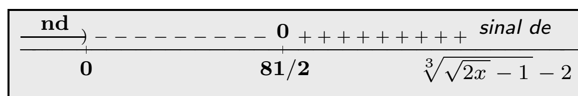
Como no exercício anterior, aqui também, a expressão em estudo é contínua em todo o seu domínio de definição.

- O domínio da expressão é o intervalo $[0,\infty)$.
- A expressão se anula quando:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2=0 \iff \sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}=2 \iff \sqrt{2x}-1=8 \iff \sqrt{2x}=9$$
$$\implies x=81/2\,.$$

  Testando $x=91/2$ na equação concluímos que esse valor é, de fato, sua única solução.
- Teste de sinal em $[0,81/2)$:
  Em $x=2\in[0,81/2)$ temos:
  $\left.\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2\right|_{x=2}=\sqrt[3]{\sqrt{2\times 2}-1}-2=\sqrt[3]{2-1}-2=-1<0\ (-)$.
- Teste de sinal em $(81/2,\infty)$:
  Em $x=2\times 81\in(81,\infty)$ temos:
  $\left.\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2\right|_{x=2\times 81}=\sqrt[3]{\sqrt{2\times 2\times 81}-1}-2=\sqrt[3]{18-1}-2=\sqrt[3]{17}-2>0\ (+)$.

Finalizando o estudo de sinais temos:



Conclusão: $\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}\geq 2 \iff x\in[81/2,\infty)$.

24. Sabendo que $x^{\pi}=2$ determine o valor das expressões:

(a) $x^{2\pi}$ **(b)** x^{π^2} **(c)** $x^{-5\pi}$ **(d)** $x^{\pi+2}$ **(e)** x **.**

Solução Devemos escrever as expressões a seguir como uma potência de base x^π.

(a) $x^{2\pi} = \left(x^\pi\right)^2 = \left(2\right)^2 = 4$;

(b) $x^{\pi^2} = \left(x^\pi\right)^\pi = \left(2\right)^\pi = 2^\pi$;

(c) $x^{-5\pi} = \left(x^\pi\right)^{-5} = \left(2\right)^{-5} = 1/2^5$;

(d) $x^{\pi+2} = \left(x^\pi\right)^{\frac{\pi+2}{\pi}} = \left(2\right)^{\frac{\pi+2}{\pi}} = 2^{1+\frac{2}{\pi}} = 2 \times 2^{\frac{2}{\pi}}$;

(e) $x = \left(x^\pi\right)^{\frac{1}{\pi}} = \left(2\right)^{\frac{1}{\pi}} = 2^{\frac{1}{\pi}}$.

☛ Note que todas as potências acima estão bem definidas pois x é positivo e, consequentemente, x^π também é positivo.

25. Sabendo que $10^x = 3$ calcule o valor das expressões $\dfrac{2^{2x} \times 5^{2x} - 1}{10^{3x}}$ e $\dfrac{10^{1-x} \times 20^{2x+1}}{4^{x+1}}$.

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{2^{2x} \times 5^{2x+1} - 1}{10^{3x}} = \dfrac{10^{2x} \times 5 - 1}{\left(10^x\right)^3} = \dfrac{\left(10^x\right)^2 \times 5 - 1}{27} = \dfrac{45-1}{27} = \dfrac{44}{27}$.

(b) $\dfrac{10^{1-x} \times 20^{2x+1}}{4^{x+1}} = \dfrac{10^{1-x} \times 2^{2x+1} \times 10^{2x+1}}{\left(2^2\right)^{x+1}} = \dfrac{10^{2+x} \times 2^{2x+1}}{2^{2x+2}} = \dfrac{10^2 \times 10^x}{2} = 3 \times 50 = 150$.

☛ No item (e) do exercício anterior determinamos o valor de x sabendo que $x^\pi = 2$. Agora, sabendo que $10^x = 3$, como determinar o valor de x? Por enquanto, não sabemos resolver essa questão, isto é, não sabemos resolver a equação $10^x = 3$.

26. Resolva a equação $x^{2\pi} - 5x^\pi + 6 = 0$.

Solução Essa equação é da forma $\left(x^\pi\right)^2 - 5x^\pi + 6 = 0$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = x^\pi$ obtemos a equação $y^2 - 5y + 6 = 0$ cujas soluções são $y = 2$ e $y = 3$.

Para voltar a variável inicial devemos fazer:

Passo 1: $y = 2$.
Nesse caso: $2 = x^\pi \quad \therefore \quad x = \left(x^\pi\right)^{\frac{1}{\pi}} = 2^{\frac{1}{\pi}}$.

Passo 2: $y = 3$.
Nesse caso: $3 = x^\pi \quad \therefore \quad x = \left(x^\pi\right)^{\frac{1}{\pi}} = 3^{\frac{1}{\pi}}$.

Assim, os possíveis valores para x são: $3^{\frac{1}{\pi}}$ e $2^{\frac{1}{\pi}}$.

27. Determine o domínio das expressões:

(a) $\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$ **(b)** $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}$.

Solução

(a) Para a base devemos ter: $1+x \geq 0 \iff x \geq -1$.

O expoente estará bem definido para $x \neq 0$.

Quando $x = -1$ a base se anula e o expoente vale -1.
Assim, a potência não está bem definida para $x = -1$.

Consequentemente, o domínio da expressão é o conjunto $(-1\,,0) \cup (0\,,\infty)$.

(b) Nesse caso, a base está bem definida para $x \neq 0$ e é positiva. O expoente, por sua vez, está bem definido para $x \neq 1$. Assim, o domínio da expressão é: $(-\infty\,,0) \cup (0\,,1) \cup (1\,,\infty)$.

28. Determine o domínio das expressões:

(a) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$ **(b)** $\left(1+\frac{2}{x}\right)^{|x|}$ **(c)** $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+2}$ **(d)** $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}$.

Solução Passemos ao estudo de cada uma das expressões.

(a) Precisamos estudar o sinal de $1-1/x$. Podemos fazer isso como fazíamos antes ou então, escrevendo:

Para $x \neq 0$ temos que:

$$1-\frac{1}{x} \geq 0 \iff 1 \geq \frac{1}{x} \iff \frac{1}{x} \leq 1 \iff x \in (-\infty\,,0) \cup [\,1\,,\infty)\,.$$

Além disso, a base só se anula para $x = 1$ e nesse caso, o expoente vale 1. Portanto o domínio da expressão é o conjunto $(-\infty\,,0) \cup [\,1\,,\infty)$.

(b) Novamente, devemos analizar o sinal de $1+2/x$. Para $x \neq 0$ temos que:

$$1+\frac{2}{x} \geq 0 \iff \frac{2}{x} \geq -1 \iff \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{2} \iff x \in (-\infty\,,-2\,] \cup (\,0\,,\infty)\,.$$

A base só se anula para $x = -2$ e nesse caso o expoente vale $|-2| = 2$. Consequentemente, a potência também está bem definida quando $x = -2$.

Assim sendo, o domínio da expressão é o conjunto $(-\infty\,,-2\,] \cup (\,0\,,\infty)$.

(c) Aqui precisamos estudar o sinal da expressão:

$$\frac{x}{x+1} \tag{15.1}$$

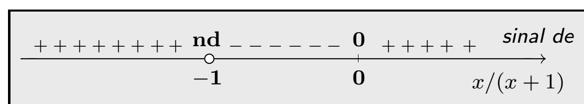
☞ A expressão (15.1) só não está bem definida para $x = -1$ e varia continuamente em todo o seu domínio de definição.

☞ Ela se anula quando, e somente quando $x = 0$:

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-1\,)$:
Em $x=-2\in(-\infty\,,-1\,)$ temos:
$$\left.\frac{x}{x+1}\right|_{x=-2}=\frac{-2}{-2+1}=2>0\ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(-1\,,0\,)$:
Em $x=-1/2\in(-1\,,0\,)$ temos:
$$\left.\frac{x}{x+1}\right|_{x=-1/2}=\frac{-1/2}{-1/2+1}=-1<0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(\,0\,,\infty)$:
Em $x=1\in(\,0\,,\infty)$ temos:
$$\left.\frac{x}{x+1}\right|_{x=1}=\frac{1}{1+1}=1/2>0\ (+).$$



Concluímos então que

$$\frac{x}{x+1}>0 \iff x\in(-\infty\,,-1\,)\cup(\,0\,,\infty)\,.$$
$$\frac{x}{x+1}=0 \iff x=0\,.$$

Nos pontos em que a base se anula o expoente vale 2. Concluímos então que o domínio de

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+2} \quad \text{é o conjunto} \quad (-\infty\,,-1\,)\cup[\,0\,,\infty)\,.$$

(d) Passemos ao estudo do sinal da expressão

$$\frac{x+1}{x-1}\,. \tag{15.2}$$

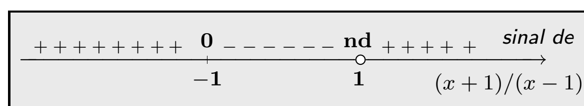
☞ A expressão (15.2) só não está bem definida para $x=1$ e também varia continuamente em todo o seu domínio de definição.

☞ Ela se anula apenas para $x=-1$.

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-1\,)$:
Em $x=-2\in(-\infty\,,-1\,)$ temos:
$$\left.\frac{x+1}{x-1}\right|_{x=-2}=\frac{-2+1}{-2-1}=1/3>0\ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(-1\,,1\,)$:
Em $x=0\in(-1\,,1\,)$ temos:
$$\left.\frac{x+1}{x-1}\right|_{x=0}=\frac{0+1}{0-1}=-1<0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(\,1\,,\infty)$:
Em $x=2\in(\,1\,,\infty)$ temos:
$$\left.\frac{x+1}{x-1}\right|_{x=2}=\frac{2+1}{2-1}=3>0\ (+).$$



Resulta então que

$$\frac{x+1}{x-1}>0 \iff x\in(-\infty\,,-1\,)\cup(\,1\,,\infty)$$
$$\frac{x+1}{x-1}=0 \iff x=-1\,.$$

Nos pontos em que a base se anula o expoente vale $(-1)^2=1>0$. Consequentemente, o domínio de

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2} \quad \text{é o conjunto} \quad (-\infty\,,-1\,]\cup(\,1\,,\infty)\,.$$

Exercícios

1. Seja $A = (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}$.
Calcule A^2 e deduza o valor de A.

2. Simplifique:
(a) $\dfrac{10^3 \times 10^{-5}}{10^2 \times 10^6}$
(b) $\dfrac{0,01 \times 10^{-4}}{10^{-3} \times 0,1}$
(c) $\dfrac{8 \times 10 \times 5^3 \times 6^4}{4^4 \times 25 \times 30}$
(d) $\dfrac{10^3 \times 8^{-3}}{10^{-2} \times 2^5}$
(e) $\dfrac{30^3 \times 15^4 \times 18 \times 2^3}{8^3 \times 10^2 \times 15^4}$
(f) $\dfrac{8^{-4} \times 15^{-3} \times 16^4}{14^{-4} \times 72 \times 36^{-2}}$.

3. Simplifique e efetue:
(a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}$.
(b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
(c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2$.

4. Simplifique:
(a) $\dfrac{2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}$
(b) $(2x^{-3})^{-\frac{1}{3}}$
(c) $27^{-\frac{2}{3}} \times 9^{1,5}$.

5. Simplifique:
$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1} + \frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3}.$$

6. Se $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ calcule:
(a) $x + x^{-1}$
(b) $x^2 + x^{-2}$
(c) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 2}{x^2 + x^{-2} + 3}$.

7. Determine o domínio de definição das expressões a seguir e simplifique-as.
(1) $\sqrt{\sqrt{a} \times \dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}$ (2) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^5} \times \sqrt[3]{a^4}$.

8. Determine o domínio de definição da expressão a seguir e simplifique-a.
$\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}} \times \sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}}$.

9. Simplifique:
(1) $\sqrt{a^{-\frac{5}{3}} b^3 c^{-\frac{2}{3}}} \div \sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}} b^4 c^{-1}}$
(2) $a^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\sqrt[3]{a} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{2}}}$.

10. Simplifique:
(a) $\dfrac{2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}$
(b) $\left(2x^3\right)^{-\frac{1}{3}}$
(c) $27^{-\frac{2}{3}} \times 9^{1,5}$.

11. Determine o domínio da expressão a seguir e simplifique-a:
$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1} + \frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3}.$$

12. Calcule:
(a) $2\sqrt{27} \times 6\sqrt{3}$
(b) $5\sqrt{72} \times 3\sqrt{50}$
(c) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - 4\sqrt{75} - 6\sqrt{48}$
(d) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - 4\sqrt{75} - 6\sqrt{48}$
(e) $\sqrt{32} \times \sqrt{1/2}$
(f) $\sqrt{75} \times \sqrt{1/27}$.

13. Escreva na forma de fração irredutível:
(a) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$ (b) $\left(\dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3}\right)^5$
(c) $\dfrac{35^2 \times 6^4}{14^5 \times 15^2}$.

14. Efetue, dando a resposta na forma de uma fração irredutível.

(a) $\dfrac{5 \times 11^4 \times 18^4 \times 24^3}{55 \times 18^2}$

(b) $\dfrac{15 \times 24^4 \times 12^2 \times 22}{33 \times 8}$

(c) $\dfrac{45 \times 42^4 \times 36^3 \times 72}{35 \times 28}$

(d) $\dfrac{48 \times 22^4 \times 44 \times 121}{48^3 \times 38}$

(e) $\dfrac{115^2 \times 225^2 \times 6^3 \times 24^5}{75^2 \times 23^3 \times 625^3}$

(f) $\dfrac{125 \times 225^2 \times 6^3 \times 42}{84^2 \times 625^3}$.

15. Efetue:

(a) $(-2)^3 - (-1)^2 + (-3)^2 - (-2)^{-2}$

(b) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^0 \times (0,01)^2 \times (0,25)^{\frac{1}{2}}$

(c) $2^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 1,33^0 + 4^{\frac{3}{2}}$.

16. Efetue:

(a) $4^{\frac{1}{2}} - (-1)^{10} - (-1)^{17} + 25^{0,5}$

(b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - \left(-\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{3}{9}} - 4^{-\frac{1}{2}}$.

17. Efetue:

(1) $(x^m)^2$

(2) $(-2x^{-2})^2$

(3) $\left(\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)^2$

(4) $\left(\frac{1}{2}x^2y^{-2}\right)^3$

(5) $(-2x^{m+1})^2$

(6) $(-2x)^2$

(7) $(-2x)^3$

(8) $3x^2y^3 - y(xy)^2$

(9) $x^{-1} \times 3x^2$.

18. Simplifique: $\dfrac{(-a)^7 \times (-b^2c^3)^4}{-b^3c \times (-a)^5}$.

19. Considere um segmento AB de comprimento $5\,cm$. Use régua e compasso para construir segmentos de comprimentos $AB\sqrt{2}$, $AB\sqrt{3}$, $AB\sqrt{6}$ e $AB/\sqrt{2}$.

20. Um cubo de aresta l é cortado por um plano que passa pelo meio de algumas arestas, como mostrado na figura abaixo. A interseção do cubo com o plano é um polígono regular.

Qual o perímetro desse polígono? Qual a sua área?

21. Uma aranha e um mosquito estão situados em vértices opostos de um cubo de aresta l como mostrado na figura ao lado. A aranha, com a intenção de capturar o mosquito, desloca-se de A até B pelo caminho mais curto, evidentemente, ao longo das faces e arestas do cubo.

Quais caminhos a aranha pode ter seguido? Qual a medida desses caminhos mais curtos?

22. Determine o domínio de definição das expressões a seguir.

(a) $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$

(b) $\sqrt[4]{4x - x^3}$

(c) $\sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}$

(d) $\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x+2}}$

(e) $\sqrt[6]{1 - \sqrt[4]{1 - \sqrt{x^2 - 1}}}$

(f) $\sqrt[6]{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6}$.

23. Resolva as seguintes equações:

(1) $\sqrt[3]{x^4 + x^3 - 28x^2 + 3x + 143} - x + 1 = 0$;

(2) $2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (a \neq 0)$;

(3) $\dfrac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\dfrac{1 + bx}{1 - bx}} \pm 1 = 0 \quad (a, b \neq 0)$;

(4) $\sqrt{3x - 4} - \sqrt[6]{(3x - 4)^3(9x - 6)} = 0$;

(5) $\left(\dfrac{1}{x^n} - x^{1-n}\right)^{\frac{1}{n}} - (1 - x)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$
onde $a > 0$;

(6) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5$;
(7) $\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{26-x}+1=0$;
(8) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}=1$;

(9) $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=4\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$;
(10) $\dfrac{\sqrt[3]{a+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[3]{a+x}}{a}=\sqrt[3]{x} \quad (a \neq 0)$;
(11) $\sqrt[n]{(1+x)^2}+\sqrt[n]{(1-x)^2}=2\sqrt[n]{1-x^2}$ onde $n \in \mathbb{Z}^+$;
(12) $\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{(1-x)^2}=\sqrt[n]{1-x^2}$ onde $n \in \mathbb{Z}^+$;
(13) $\dfrac{2-\sqrt{2-x}}{2+\sqrt{2-x}}=\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}$.

24. Resolva[6] os sistemas:

(a) $\begin{cases} x+y=35 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y=16+2\sqrt{xy} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \end{cases}$

25. Determine para quais valores de x as igualdades a seguir são verdadeiras.
(1) $\sqrt{x^2}=\sqrt{x}\times\sqrt{x}$;
(2) $\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x}$;
(3) $\sqrt{x^2}=-x$;
(4) $\sqrt[3]{x^3}=x$;
(5) $\sqrt[3]{x^3}=-x$;
(6) $\sqrt{x^2}=|x|$;
(7) $\sqrt{x^4}=x^2$;
(8) $\sqrt[4]{x^2-1}=\sqrt[4]{x-1}\times\sqrt[4]{x+1}$;
(9) $\sqrt{x^2-x}=\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}$;
(10) $\sqrt[3]{x^2-x}=\sqrt[3]{x-1}\times\sqrt[3]{x}$;
(11) $\sqrt[4]{x^{12}}=x^3$;
(12) $\sqrt[4]{x^{12}}=|x|^3$;
(13) $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x}$;
(14) $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{|x|}$;
(15) $\sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2$;
(16) $\sqrt[8]{x^6}=\sqrt[4]{x^3}$;
(17) $\sqrt[8]{x^6}=\sqrt[4]{|x|^3}$;
(18) $\sqrt[12]{x^8}=\sqrt[3]{|x|^2}$.

26. Em cada um dos itens a seguir determine o maior subconjunto da reta que pode ser escrito como uma união de intervalos não degenerados[7] e no qual a expressão está bem definida. São nesses domínios que analizamos a diferenciabilidade das expressões abaixo.

(1) x^x (2) $(x+2)^x$

(3) $(1-x)^{\left(1+\frac{|x|}{x}\right)}$ (4) $\left(\sqrt[4]{1-\dfrac{2x}{|x|}}\right)^{x-x^2}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^{2x}-1}}$ (6) $(x^2-3x+2)^{|x|}$

(7) $\left(\sqrt[3]{3x-x^2}\right)^{\sqrt{x-1}}$ (8) $\left(1-\dfrac{1}{|x|}\right)^{\sqrt[4]{|x|-2}}$

(9) $\left(x+\dfrac{1}{|x|}\right)^{(x-\frac{x}{|x|})}$ (10) $(x^2-x-2)^{\sqrt[3]{1-x}}$.

27. *Resolva a equação* $\sqrt{x^2}=2$.

Solução:
Temos que: $\sqrt{x^2}=(x^2)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{2}{2}}=x.$
Consequentemente: se $\sqrt{x^2}=2$ então $x=2$.
Portanto: $\mathcal{S}=\{2\}$.

A solução está correta ? Se não, onde está o erro ?

28. *Resolva a equação* $\sqrt[4]{x}=-2$.

Solução:
De: $\sqrt[4]{x}=-2$;
segue que: $(\sqrt[4]{x})^4=(-2)^4=16$.
Logo: $x=16$.
Portanto: $\mathcal{S}=\{16\}$.

A solução está correta ? Se não, onde está o erro ?

29. *Resolva a equação* $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=1$.

Solução:
Temos que: $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=\sqrt{x^2}$.
Além disso: $\sqrt{x^2}=|x|$.
Logo,
de: $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=1$
segue que: $|x|=1$.
Portanto: $\mathcal{S}=\{\pm 1\}$.

A solução está correta ? Se não, onde está o erro ?

[6] As respostas neste exercício incluem apenas o valor da variável x .
[7] Um intervalo da reta é dito *degenerado* quando ele se reduz ao conjunto vazio ou a um conjunto unitário.

30. Resolva as inequações a seguir. Antes porém, verifique se as expressões envolvidas variam continuamente em seus respectivos domínios de definição.

(a) $x\sqrt{x+1} > \sqrt{2}(x+1)$;

(b) $2x\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1} \leq 1$;

(c) $x\sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x^2}} < x - 1$;

(d) $\dfrac{1}{x} + \sqrt[3]{\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x}} \geq 1$;

(e) $x(\sqrt{x} - 2)^4 \leq (x-4)^2$.

31. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.

(1) $x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2(1+x^2)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(2) $x\sqrt{1+x^2} = \dfrac{x}{|x|}\sqrt{x^2(1+x^2)}$, $\forall x \neq 0$;

(3) $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1} \ \Rightarrow\ x^2+1 = y^2+1$ para todo $x\,, y \in \mathbb{R}$;

(4) $x\sqrt{1+x^2} = -\sqrt{x^2(1+x^2)}$, $\forall x < 0$;

(5) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(6) $|x|\sqrt[3]{x} = x\sqrt[6]{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(7) $\sqrt[3]{|x|} = \sqrt[4]{|x|\sqrt[3]{|x|}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(8) $\sqrt[5]{x} = -\sqrt[6]{x\sqrt[5]{x}}$, $\forall x \leq 0$.

32. Quantas vezes as expressões

$$x^{4/3} \quad ; \quad x^{29/7} \quad ; \quad x^{\pi} \quad ; \quad x^{\sqrt{105}}$$

são deriváveis em $x = 0$ e qual o valor dessas derivadas ? Determine potências com expoentes inteiros que *dominam* essas potências em $(0\,,1)$.

33. Existem intervalos não degenerados da reta nos quais as expressões a seguir estão bem definidas?

(a) -1^x

(b) $(-1)^x$

(c) $(-x)^x$

(d) $(2x - x^2 - 1)^x$

(e) $\left(\dfrac{x^2}{1+x^2} - 1\right)^{|x|}$

34. Considere a expressão $\big(2x + x^{-1}\big)^{-1}$. Esccreva-a sem usar expoentes negativos, dê o seu domínio de definição e simplifique-a.

35. Repita o exercício anterior para a expressão

$$\frac{2x^{-1} - x^{-2}}{x^{-2} + 2x^{-3}}$$

16

Propriedades das potências

Na lição anterior relembramos a definição de potência e listamos algumas operações elementares entre elas. Agora vamos estudar as propriedades fundamentais das potências que nos permitirão comparar potências, resolver algumas equações e inequações envolvendo potências e analisar sinais de expressões mais complexas do que as estudadas até agora. Relembramos, também, gráficos de expressões dadas por potências elementares.

1 Propriedades

A primeira dessas propriedades é a seguinte:

$$\boldsymbol{a^b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0} \text{ e } \boldsymbol{b > 0}\,.$$

Essa propriedade nos permite resolver equações envolvendo potências como, por exemplo, as mostradas nos exemplos a seguir. Para resolvê-las, determinamos os pontos onde a base se anula e depois verificamos em quais desses pontos o expoente é positivo. Tais pontos serão as soluções da equação dada.

Exemplos

❄ $(x-1)^x = 0$

Nesse exemplo a base só se anula em $x = 1$ e nesse ponto o expoente vale 1. Portanto, o conjunto solução dessa equação é $\mathcal{S} = \{1\}$.

❄ $(x-1)^{x-2} = 0$

Nesse exemplo a base só se anula em $x = 1$ e nesse ponto o expoente vale -1. Portanto, essa equação não tem soluções.

❄ $(x^2 - 2x - 3)^{x+1} = 0$

Passo 1: *Pontos onde a base se anula.*

Temos que:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1$.

Passo 2: *Avaliando o expoente onde a base se anula.*

$x + 1\big|_{x=3} = 3 + 1 > 0 \quad \therefore \quad x = 3$ é solução da equação inicial.

$x + 1\big|_{x=-1} = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \quad x = -1$ não é solução da equação inicial.

Assim, o conjunto solução da equação inicial é $\mathcal{S} = \{3\}$.

Outra propriedade importante é a seguinte.

$$\boldsymbol{a^b = 1 \iff a = 1} \text{ e } \boldsymbol{b} \text{ qualquer , ou então , } \boldsymbol{b = 0} \text{ e } \boldsymbol{a \neq 0}.$$

Essa propriedade também vai nos permitir resolver equações envolvendo potências como, por exemplo, as mostradas nos exemplos a seguir. Para resolvê-las, determinamos os pontos onde a base vale 1 e depois determinamos os pontos onde o expoente se anula mas a base não. O conjunto solução será a união desses dois conjuntos, como veremos a seguir.

Exemplos

❄ $(x-1)^x = 1$

Passo 1: *Pontos onde a base vale* 1.

$x - 1 = 1 \iff x = 2$.

Passo 2: *Pontos onde o expoente se anula e a base não.*

O expoente só se anula em $x = 0$ e nesse ponto a base vale:
$x - 1\big|_{x=0} = -1 \neq 0$

Portanto, o conjunto solução é $\mathcal{S} = \{2, 0\}$

❄ $(x^2 - x - 2)^{x-2} = 1$

Passo 1: *Pontos onde a base vale* 1.

$x^2 - x - 2 = 1 \iff x^2 - x - 3 = 0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{1+12}}{2} \iff x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Passo 2: *Pontos onde o expoente se anula e a base não.*

O expoente só se anula em $x = 2$ e nesse ponto a base vale:
$x^2 - x - 2\big|_{x=2} = 4 - 2 - 2 = 0$.

Portanto, o conjunto solução é $\mathcal{S} = \{\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\}$.

❄ $(x^2 - 2x - 2)^{x+3} = 1$

Passo 1: *Pontos onde a base vale* 1.

Temos que:

$x^2 - 2x - 2 = 1 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1$.

Portanto, -1 e 3 são soluções da equação inicial.

Passo 2: *Pontos onde o expoente se anula e a base não.*

O expoente só se anula em $x = -3$ e nesse ponto temos:

$x^2 - 2x - 2\big|_{x=-3} = 9 + 6 - 2 \neq 0 \quad \therefore \quad x = -3$ é solução da equação inicial.

Assim, o conjunto solução da equação inicial é $\mathcal{S} = \{-3\,, -1\,, 3\}$.

Vamos agora relembrar mais algumas propriedades, conseqüências da propriedade anterior e que nos permitirão resolver novas equações.

Para *base* $\boldsymbol{0 < b \neq 1}$ **e** *expoentes* $\boldsymbol{\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}}$**:**

$$\boldsymbol{b^\alpha = b^\beta \iff \alpha = \beta\,.}$$

Para *expoente* $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ **e** *bases* $\boldsymbol{a\,, b > 0}$**:**

$$\boldsymbol{a^\alpha = b^\alpha \iff a = b\,.}$$

Exemplos

❄ $2^x = 2^3 \iff x = 3$.

❄ $0{,}1^{|x|-1} = 0{,}1^3 \iff |x| - 1 = 3$.

❄ $\pi^{|x|} = \pi \iff |x| = 1$.

❄ $10^{1-x} = 10^{2x+1} \iff 1 - x = 2x + 1$.

❄ $2{,}2^{3x} = 2{,}2^{2x+1} \iff 3x = 2x + 1$.

❄ $0{,}2^{2x} = 0{,}2^{1-y} \iff 2x = 1 - y$.

❄ $|x|^{\sqrt{3}} = |2x-1|^{\sqrt{3}} \iff |x| = |2x-1|$.

❄ $(2+x^4)^{3/5} = 2^{1/5} \iff 2+x^4 = \sqrt[3]{2}$.

❄ $(1+x^2)^{\pi} = 2^{\pi} \iff 1+x^2 = 2$.

❄ $|x+1|^{x^2} = 2^{x^2} \iff |x+1| = 2$.

❄ $\big(1+|x|\big)^{0,1} = 2^{0,2} \iff 1+|x| = 4$.

❄ $(1+2x^2)^{x} = 2^{x} \iff 1+2x^2 = 2$.

❄ Note que:

☞ $0^{\alpha} = 0^{\beta}$, $\forall\, \alpha\,,\beta > 0$. Em particular, não podemos concluir que $\alpha = \beta$;

☞ $1^{\alpha} = 1^{\beta}$, $\forall\, \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$. Aqui, também não podemos concluir que $\alpha = \beta$;

☞ $a^0 = b^0$, $\forall\, a\,,b \neq 0$. Em particular, não podemos concluir que $a = b$.

Isso mostra que para resolvermos equações usando as propriedades da tabela acima não podemos esquecer das *hipóteses* sobre a base e o expoente.

❄ $|2x-1|^{3/2} = 5^{3/2} \iff |2x-1| = 5$.

❄ No entanto, *não podemos afirmar* que: $x^{4/5} = 2^{4/5} \iff x = 2$
pois a base x pode assumir valores negativos. Repare que $x = -2$ também é solução.

❄ $|x-1|^{-4/5} = 1 \iff |x-1|^{-4/5} = 1^{-4/5} \iff |x-1| = 1$.

❄ $(|x|+1)^{-\sqrt{2}} = 1 \iff (|x|+1)^{-\sqrt{2}} = 1^{-\sqrt{2}} \iff |x|+1 = 1$.

❄ $(1+x^4)^{-\pi} = 3^{-\pi} \iff 1+x^4 = 3$.

❄ $|x-1|^{\pi} = (2+3|x|)^{\pi} \iff |x-1| = 2+3|x|$.

❄ $|x-1|^{\pi} = 2^{\pi/3} \iff |x-1|^{\pi} = \big(\sqrt[3]{2}\big)^{\pi} \iff |x-1| = \sqrt[3]{2}$.

❄ $(x^2+1)^{|x|} = 2^{3|x|} \iff (x^2+1)^{|x|} = 8^{|x|} \iff x^2+1 = 8$ ou $x = 0$.

Uma expressão da forma b^x onde $0 < b \neq 1$ é dita uma *expressão exponencial*.

Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$: se $a = b$ então $a^{\alpha} = b^{\alpha}$, desde que a^{α} e b^{α} façam sentido. A recíproca dessa afirmação só é verdadeira para bases positivas, como enunciado no quadro anterior. No entanto, quando α *não é irracional* podemos demonstrar o seguinte resultado.

Quando $\alpha > 0$ é uma fração irredutível com numerador par, temos:

$a^{\alpha} = b^{\alpha} \iff a = \pm\, b$, $\forall\, a\,,b \in \mathbb{R}$.

Quando $\alpha > 0$ é uma fração irredutível com numerador ímpar, e denominador ímpar, temos:

$a^{\alpha} = b^{\alpha} \iff a = b$, $\forall\, a\,,b \in \mathbb{R}$.

A propriedade acima também vale para *expoente negativo*, desde que as bases $a\,,b$ sejam *não nulas*.

Exemplos

❄ $x^2 = a^2 \iff x = \pm a$.

❄ $x^{3/5} = (y-1)^{3/5} \iff x = y - 1$.

❄ $(x^2-1)^{2/3} = (x+2)^{2/3} \iff x^2 - 1 = \pm(x+2)$.

❄ $(x-1)^{4/3} = 2(x-2)^{4/3} \iff (x-1)^{4/3} = [2^{3/4}(x-2)]^{4/3} \iff x - 1 = \pm 2^{3/4}(x-2)$.

❄ $(x-2)^{7/5} = (1-2x)^{7/5} \iff x - 2 = 1 - 2x$.

❄ $(x^2-1)^{-5/3} = (1+2|x|)^{-5/3} \iff x^2 - 1 = 1 + 2|x|$
já que os valores que anulam as bases não são soluções da equação $x^2 - 1 = 1 + 2|x|$.

❄ $(x-2)^{-8/3} = (1-2x)^{-8/3} \iff x - 2 = \pm(1-2x)$
pois os valores que anulam as bases não são soluções das equações $x - 2 = \pm(1-2x)$.

2 Potências e relação de ordem

Para *base* $b > 1$:		Para $0 <$ *base* $b < 1$:	
$b^\alpha < b^\beta \iff \alpha < \beta$	**(1)**	$b^\alpha > b^\beta \iff \alpha < \beta$	**(3)**
$b^\alpha > b^\beta \iff \alpha > \beta$	**(2)**	$b^\alpha < b^\beta \iff \alpha > \beta$	**(4)**
quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.		**quaisquer que sejam** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.	

Essas desigualdades nos permitem comparar expressões numéricas e resolver inequações, como veremos nos exemplos a seguir. Elas continuam verdadeiras quando trocamos em (1), (2), (3) e (4): "$<$" por "$\leq$" e "$>$" por "$\geq$". Essas quatro propriedades são, de fato, consequências da primeira delas.

Exemplos

❄ De: $2{,}9 < 3$
Segue que: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{2{,}9} < \left(\sqrt[3]{5}\right)^3$.

❄ De: $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$
Segue que: $5^{-\sqrt{2}} > 5^{-\sqrt{3}}$.

❄ Como: $\pi > 3{,}1$
Temos que: $0{,}2^{\pi} < 0{,}2^{3{,}1}$.

❄ Como: $-\pi < -3{,}1$
Temos que: $0{,}2^{-\pi} > 0{,}2^{-3{,}1}$.

❄ De: $\sqrt{2} > 1{,}1$
Segue que: $5^{\sqrt{2}} > 5^{1{,}1}$.

❄ Como: $\pi < 3{,}15$
Temos que: $0{,}2^{\pi} > 0{,}2^{3{,}15}$.

Combinando propriedades de desigualdade e de igualdade podemos escrever:

❄ $2^x < 2^3 \iff x < 3$.

❄ $2^{|x|-1} \geq 2^3 \iff |x| - 1 \geq 3$.

❄ $2{,}2^{3x} < 2{,}2^{2x+1} \iff 3x < 2x + 1$.

❄ $2x > 1 - y \iff 0{,}2^{2x} < 0{,}2^{1-y}$.

❄ $-2 > -3 \iff 0{,}1^{-2} < 0{,}1^{-3}$.

❄ $0{,}2^{3x} \leq 0{,}2^{x+1} \iff 3x \geq x + 1$.

❄ Temos que:

$$-32 < -11{,}3 < -\pi < -3 < -2{,}91 < -1{,}01 < -0{,}03 <$$
$$< 0 < 1{,}3 < \sqrt{2} < 2{,}05 < 3 < \sqrt{11} < 20 < 21{,}09 < \frac{91}{3}\,.$$

Logo,

$$(1{,}2)^{-32} < (1{,}2)^{-11{,}3} < (1{,}2)^{-\pi} < (1{,}2)^{-3} < (1{,}2)^{-2{,}91} < (1{,}2)^{-1{,}01} < (1{,}2)^{-0{,}03} <$$
$$< (1{,}2)^{0} < (1{,}2)^{1{,}3} < (1{,}2)^{\sqrt{2}} < (1{,}2)^{2{,}05} < (1{,}2)^{3} <$$
$$< (1{,}2)^{\sqrt{11}} < (1{,}2)^{20} < (1{,}2)^{21{,}09} < (1{,}2)^{\frac{91}{3}}$$

e

$$(0{,}8)^{-32} > (0{,}8)^{-11{,}3} > (0{,}8)^{-\pi} > (0{,}8)^{-3} > (0{,}8)^{-2{,}91} > (0{,}8)^{-1{,}01} > (0{,}8)^{-0{,}03} >$$
$$> (0{,}8)^{0} > (0{,}8)^{1{,}3} > (0{,}8)^{\sqrt{2}} > (0{,}8)^{2{,}05} > (0{,}8)^{3} >$$
$$> (0{,}8)^{\sqrt{11}} > (0{,}8)^{20} > (0{,}8)^{21{,}09} > (0{,}8)^{\frac{91}{3}}\,.$$

Temos ainda as seguintes propriedades:

Para $\boldsymbol{expoente\ \alpha > 0}$**:**

$a^{\alpha} < b^{\alpha} \iff a < b$ **(5)**

$a^{\alpha} > b^{\alpha} \iff a > b$ **(6)**

quaisquer que sejam $a\,,b > 0$.

Para $\boldsymbol{expoente\ \alpha < 0}$**:**

$a^{\alpha} < b^{\alpha} \iff a > b$ **(7)**

$a^{\alpha} > b^{\alpha} \iff a < b$ **(8)**

quaisquer que sejam $a\,,b > 0$.

Novamente, essas desigualdades nos permitem comparar expressões numéricas e resolver inequações,. Elas permanecem verdadeiras quando trocamos em (5) , (6) , (7) e (8): “$<$” por “$\leq$” e “$>$” por “$\geq$”. Essas quatro propriedades são consequências da primeira delas.

Exemplos

❄ De: $2{,}9 < 3$
Segue que: $2{,}9^{5,2} < 3^{5,2}$.

❄ Como: $\pi > 3{,}1$
Temos que: $\pi^{-2} < 3{,}1^{-2}$.

❄ De: $x > 1{,}4$
Segue que: $x^{\sqrt[3]{2}} > (1{,}4)^{\sqrt[3]{2}} > (1{,}4)^{\sqrt[4]{2}}$.

❄ Como: $\sqrt{2} > 1{,}4$
Temos que: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > (1{,}4)^{\sqrt{2}} > (1{,}4)^{1,4}$.

Combinando desigualdades e igualdades, obtemos:

❄ $|x|^2 < |2x-1|^2 \iff |x| < |2x-1|$

❄ $|x+1|^\pi \leq 2^\pi \iff |x+1| \leq 2$

❄ $(1+|x|)^{-2/3} \geq 2^{-2/3} \iff 1+|x| \leq 2$

❄ $(1+x^2)^{\sqrt{3}} < 2{,}9^{\sqrt{3}} \iff 1+x^2 > 2{,}9$

❄ $(x^2+y^2)^\pi > 2^\pi \iff x^2+y^2 > 2$

❄ $2^{-\sqrt{2}} < (|x|+1)^{-\sqrt{2}} \iff 2 > |x|+1$.

❄ Note que:
- ☞ $2 < 3$, no entanto não podemos concluir que $2^0 < 3^0$ pois $2^0 = 1 = 3^0$;
- ☞ $0 < 1$, no entanto *não podemos concluir* que $0^{-1} > 1^{-1}$ pois 0^{-1} não está definido.
- ☞ $-2 < -1$, no entanto *não podemos concluir* que $(-2)^2 < (-1)^2$ pois $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$.

❄ Temos que

$$1{,}01 < \sqrt{2} < 2{,}3 < 3 < \pi < \frac{23}{4} < 6{,}001 < 2\pi < 10{,}001 < 111\,.$$

Consequentemente,

$$(1{,}01)^\pi < (\sqrt{2})^\pi < (2{,}3)^\pi < 3^\pi < \pi^\pi < \left(\frac{23}{4}\right)^\pi < (6{,}001)^\pi < (2\pi)^\pi < (10{,}001)^\pi < 111^\pi$$

e

$$(1{,}01)^{-\pi} > (\sqrt{2})^{-\pi} > (2{,}3)^{-\pi} > 3^{-\pi} > \pi^{-\pi} > \left(\frac{23}{4}\right)^{-\pi} > (6{,}001)^{-\pi} > (2\pi)^{-\pi} > (10{,}001)^{-\pi} > \cdots$$

3 Gráficos

Considere uma expressão $E(x)$.

Dizemos que ela é *par* quando:

- Seu domínio de definição é um subconjunto da reta, simétrico em relação a origem ;
- $E(-x) = E(x)$ para todo x do seu domínio.

Dizemos que ela é *ímpar* quando:

- Seu domínio de definição é um subconjunto da reta, simétrico em relação a origem ;

- $E(-x) = -E(x)$ para todo x do seu domínio.

Exemplos

❄ $E(x) = x^2$ é uma expressão par pois:

- seu domínio é toda a reta, que é um conjunto simétrico em relação a origem;
- $E(-x) = (-x)^2 = x^2 = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

❄ $E(x) = x^3$ é uma expressão ímpar pois:

- seu domínio é simétrico em relação a origem como observado acima;
- $E(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

❄ $E(x) = 1/x$ é uma expressão ímpar pois:

- seu domínio é o conjunto $(-\infty\,,0\,) \cup (\,0\,,\infty)$, que é um conjunto simétrico em relação a origem;
- $E(-x) = 1/(-x) = -1/x = -E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

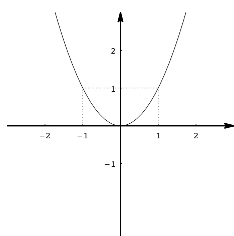
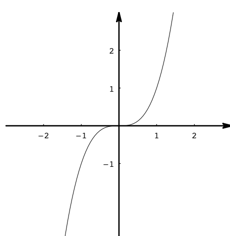
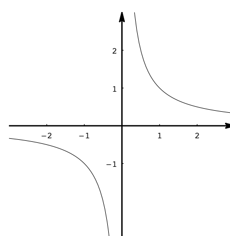
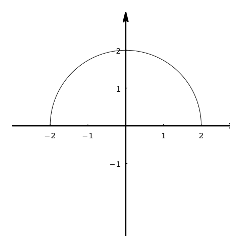
❄ $E(x) = |x|$ é uma expressão par pois:

- seu domínio é toda a reta, que é um conjunto simétrico em relação a origem;
- $E(-x) = |-x| = |x| = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

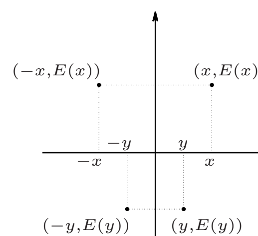
❄ $E(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é uma expressão par pois:

- seu domínio é o intervalo $[-2\,,2\,]$ que é um conjunto simétrico em relação a origem;
- $E(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = E(x)$ para todo $x \in [-2\,,2\,]$.

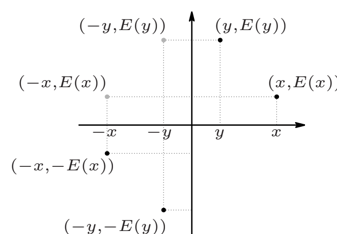
A seguir mostramos os gráficos de x^2 , x^3 , $1/x$ e $\sqrt{4-x^2}$.

Repare que, se sabemos construir o gráfico de uma expresssão par à direita da origem, então sabemos construir o gráfico à esquerda da origem: basta tomar o simétrico em relação ao eixo das ordenadas da parte do gráfico à direita da origem. Na figura, por construção temos qye: $E(-x) = E(x)$ e $E(-y) = E(y)$.



Se sabemos construir o gráfico de uma expresssão ímpar à direita da origem, então sabemos construir seu gráfico à esquerda da origem: basta fazer a operação descrita acima e em seguida tomar o simétrico em relação ao eixo das abcissas.
Na figura ao lado mostramos isso. Os pontos mais claros servem de pontos intermediários para obtermos os pontos do terceiro quadrante: primeiro refletimos os pontos em relação ao eixo das ordenadas (pontos mais claros) e depois refletimos esses novos pontos em relação ao eixo das abcissas. Na figura, por construção, $E(-x) = -E(x)$ e $E(-y) = -E(y)$.



Analogamente, se sabemos construir gráficos de expressões pares ou ímpares à esquerda da origem também sabemos fazê-lo à direita da origem.

Se uma expressão ímpar está definida na origem, então: $E(-0) = -E(0)$. Por outro lado, $E(-0) = E(0)$. Logo, $E(0) = -E(0)$ e, conseqüentemente, $E(0) = 0$.

Considere agora uma expressão $E(x)$ e seja $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não degenerado da reta, contido no domínio de definição de $E(x)$. Dizemos que:

- $E(x)$ é *crescente* em I quando: $E(x) > E(y)$ sempre que $x < y$ em I ;
- $E(x)$ é *decrescente* em I quando: $E(x) < E(y)$ sempre que $x < y$ em I .

Exemplos

❄ $E(x) = x^2$ é uma expressão crescente no intervalo $[\,0\,,\infty)$. Isso segue das propriedades das potências. Como ela é uma expressãp par, segue que ela é decrescente no intervalo $(-\infty\,,0\,]$.

❄ $E(x) = x^3$ é uma expressão crescente em toda a reta. Isso segue das propriedades das potências

❄ $E(x) = 1/x$ é uma expressão decrescente no intervalo $(\,0\,,\infty)$ ela também é decrescente no intervalo $(-\infty\,,0\,)$.

❄ $E(x) = |x|$ é uma expressão crescente no intervalo $[\,0\,,\infty)$ e é decrescente no intervalo $(-\infty\,,0\,]$.

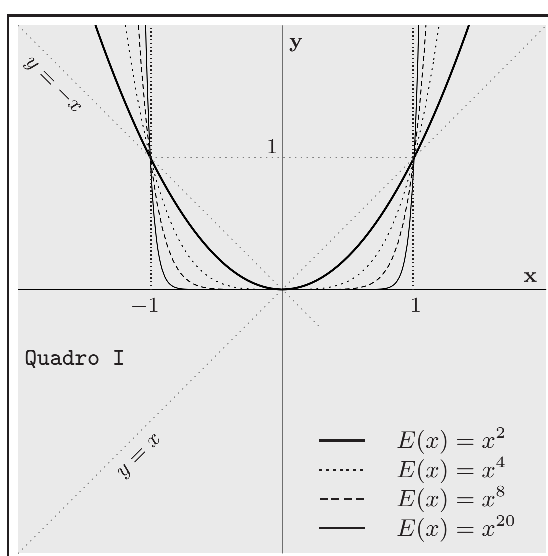
Se uma expressão par é crescente (resp. decrescente) num intervalo à direita da origem então ela é decrescente (resp. crescente) no simétrico desse intervalo em relação a origem.

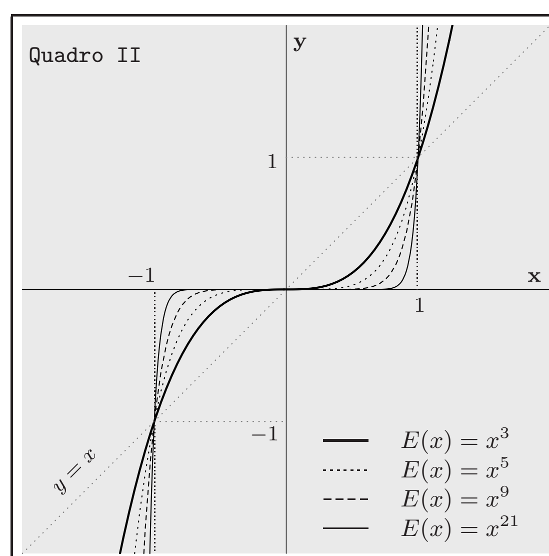
Se uma expressão ímpar é crescente (resp. decrescente) num intervalo à direita da origem então ela é crescente (resp. decrescente) no simétrico desse intervalo em relação a origem.

Os quadros a seguir exibem gráficos de expressões do tipo $E(x) = x^{\alpha}$. Como vimos na seção anterior:

- Para $\alpha > 0$ temos:
  x^α *cresce* quando x *cresce no intervalo* $[\,0\,,\infty)$, ou seja,
  $E(x) = x^\alpha$ *é crescente no intervalo* $[\,0\,,\infty)$.
- Para $\alpha < 0$ temos:
  x^α *decresce* quando x *cresce no intervalo* $(\,0\,,\infty)$, ou seja,
  $E(x) = x^\alpha$ *é decrescente no intervalo* $(\,0\,,\infty)$. Note que, nesse caso, a expressão $E(x)$ não está bem definida em $x = 0$.

3.1 Potência com expoente inteiro e positivo





Note que:

- Lembre-se que $1^\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Isso significa que o gráfico das expressões do tipo x^α passam pelo ponto $(\,1\,,1\,)$;
- As expressões no `Quadro I` são *expressões pares*, i.e. $E(-x) = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, seus gráficos são simétricos em relação ao eixo $\mathbf{y}$;
- As expressões no `Quadro II` são *expressões ímpares*, i.e. $E(-x) = -E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, seus gráficos são simétricos em relação à origem do sistema de eixos coordenados;
- Para $x > 1$ vimos que:

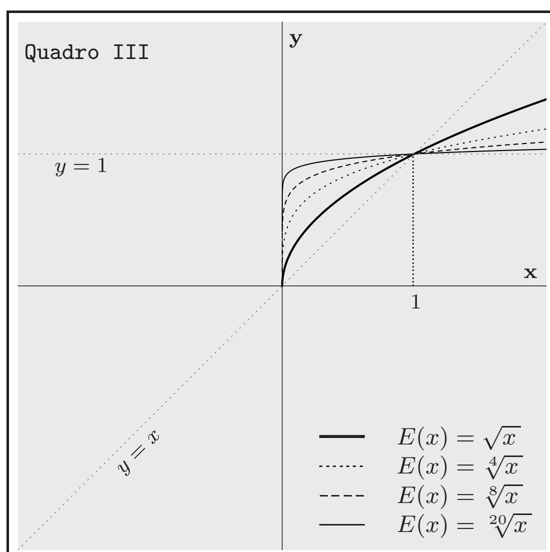
$$1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < x^5 < x^8 < x^9 < x^{20} < x^{21} \,;$$

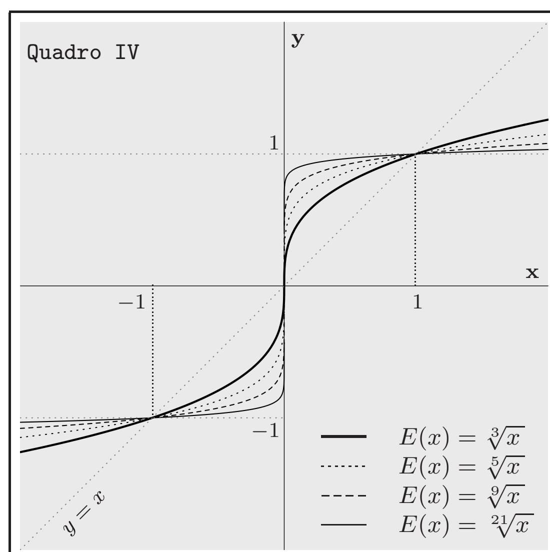
- No entanto, para $\mathbf{0 < x < 1}$ resulta:

$$1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > x^5 > x^8 > x^9 > x^{20} > x^{21}\,.$$

3.2 Potência com expoente racional positivo

Raízes:





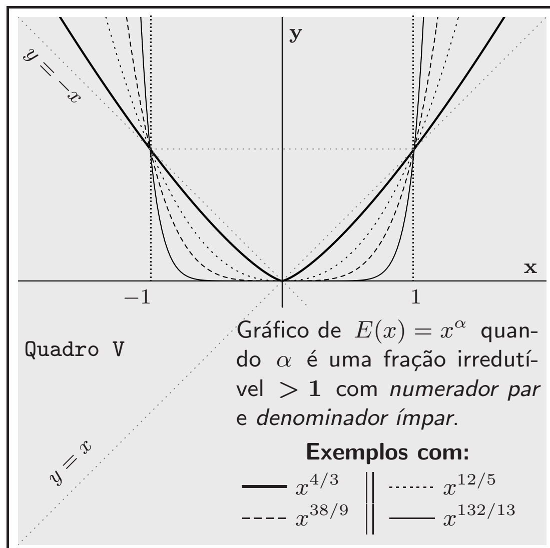
- No `Quadro III` as expressões estão definidas apenas para $x \geq 0$ já que as raízes são de índice par ;
- No `Quadro IV` elas estão definidas para $x \in \mathbb{R}$ já que as raízes são de índice ímpar . Além disso, tais expressões são ímpares , isto é, $\sqrt[2n+1]{-x} = -\left(\sqrt[2n+1]{x}\right)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e $x \in \mathbb{R}$;
- Para $x > 1$ vimos que:

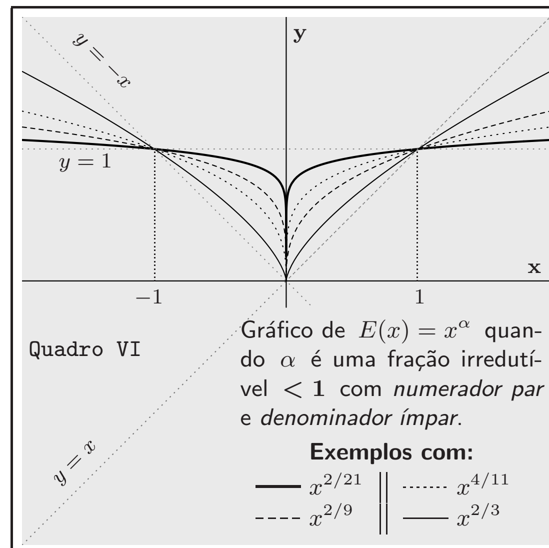
$$x > \sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \sqrt[5]{x} > \sqrt[8]{x} > \sqrt[9]{x} > \sqrt[20]{x} > \sqrt[21]{x}\;;$$

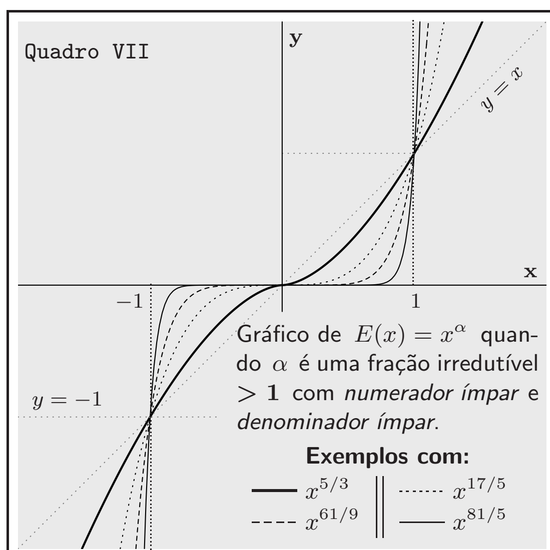
- Enquanto que para $0 < x < 1$ temos:

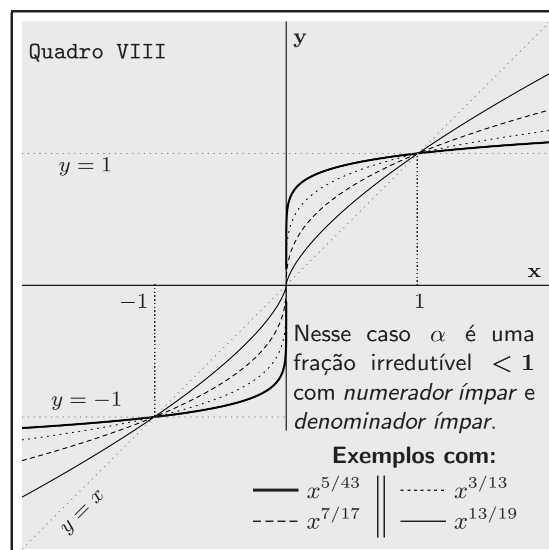
$$x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \sqrt[5]{x} < \sqrt[8]{x} < \sqrt[9]{x} < \sqrt[20]{x} < \sqrt[21]{x}\,.$$

Potências de raízes:









Nos quatro quadros acima temos:

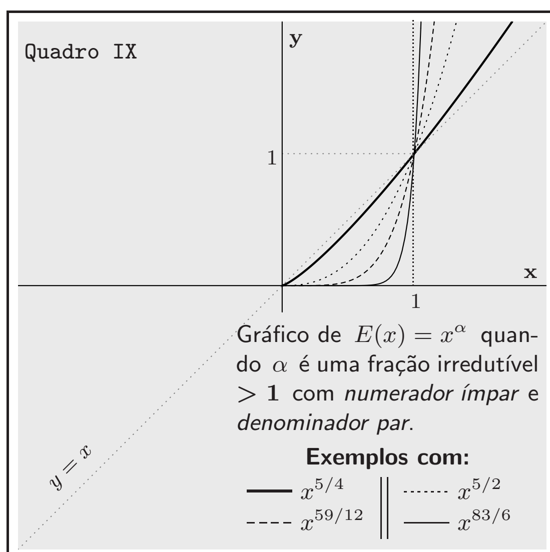
- O domínio das expressões é toda a reta $\mathbb{R}$;
- As expressões dos `Quadros V e VI` são pares e as dos `Quadros VII e VIII` são ímpares ;
- Como $\frac{4}{3} < \frac{5}{3} < \frac{12}{5} < \frac{17}{5} < \frac{38}{9} < \frac{61}{9} < \frac{132}{13} < \frac{81}{5}$ temos que

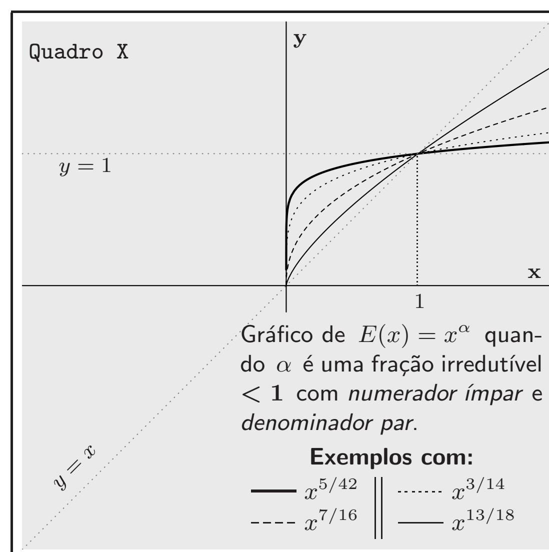
– Para $\boldsymbol{x > 1}$:

$$x^{4/3} < x^{5/3} < x^{12/5} < x^{17/5} < x^{38/9} < x^{61/9} < x^{132/13} < x^{81/5}\,;$$

– Para $\boldsymbol{0 < x < 1}$:

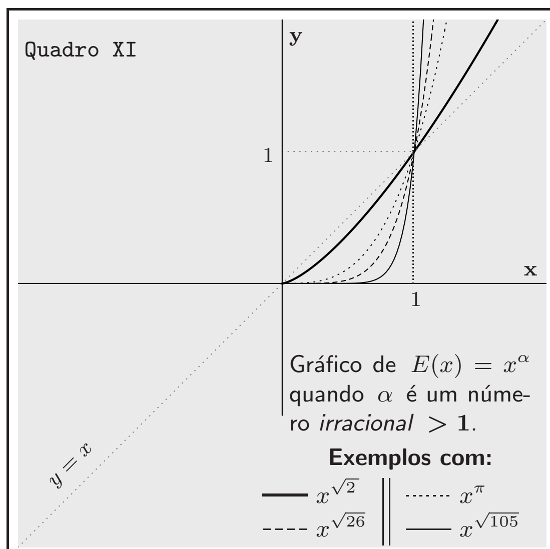
$$x^{4/3} > x^{5/3} > x^{12/5} > x^{17/5} > x^{38/9} > x^{61/9} > x^{132/13} > x^{81/5}\,.$$

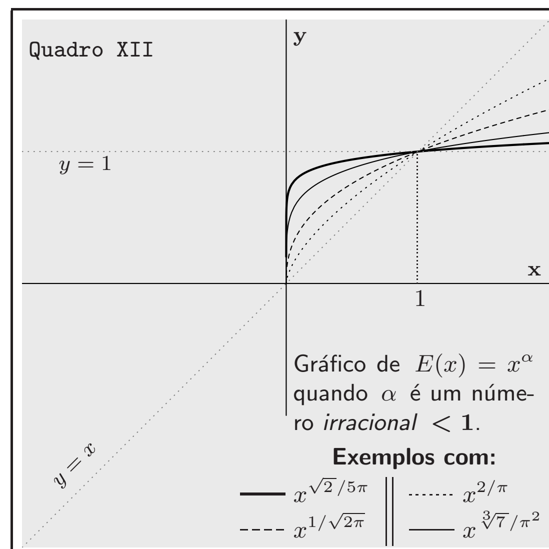




Note que as expressões dos `Quadros IX e X` só estão definidas para $x \geq 0$ pois todas elas envolvem raízes de índice par.

3.3 Potência com expoente irracional positivo

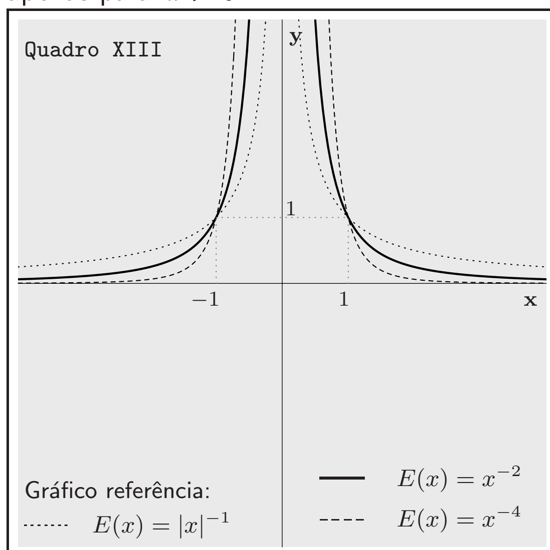


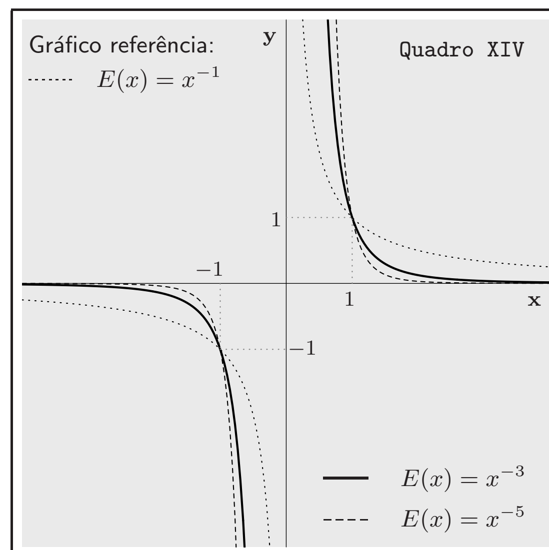


Note que as expressões dos `Quadros XI e XII` só estão definidas para $x \geq 0$ pois trata-se de potências com expoentes irracionais.

3.4 Potência com expoente negativo

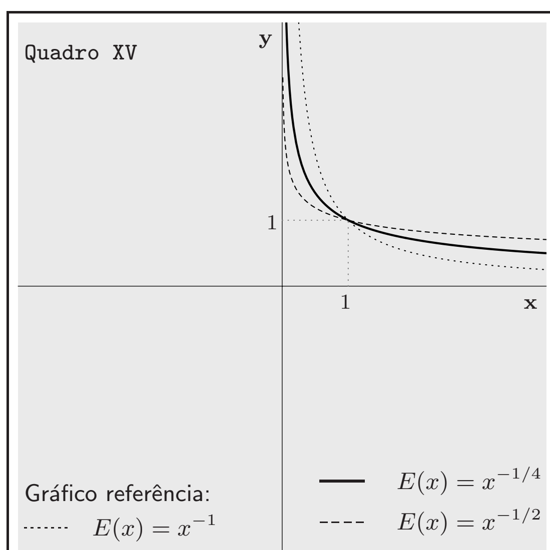
Os quadros a seguir exibem gráficos de expressões $E(x) = x^{-\alpha}$ para valores de $\alpha > 0$. Como o expoente é negativo, as expressões serão decrescentes no intervalo $(0\,,\infty)$. Tais expressões não estão definidas para $x = 0$. Algumas delas estarão definidas para todo $x \neq 0$ e outras apenas para $x > 0$.

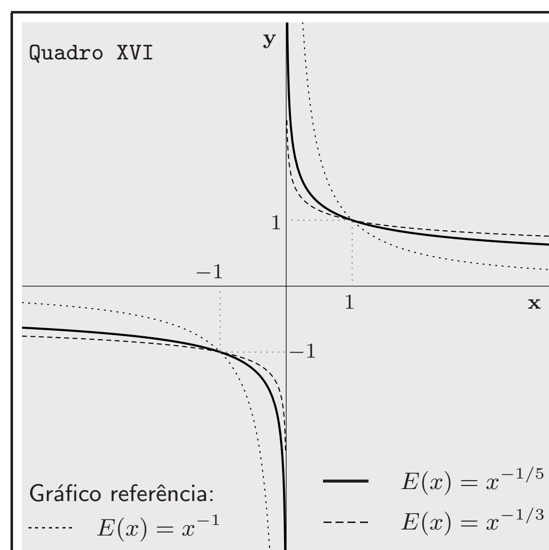




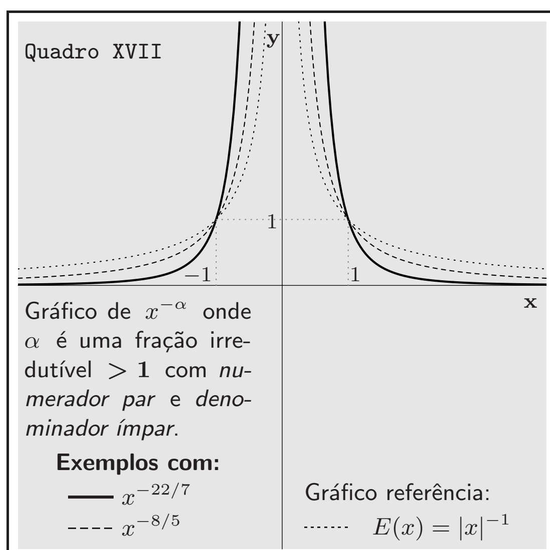
No Quadro XIII temos gráficos de expressões definidas para todo real não nulo. Além disso, as expressões são pares, fornecendo gráficos simétricos em relação ao eixo vertical.

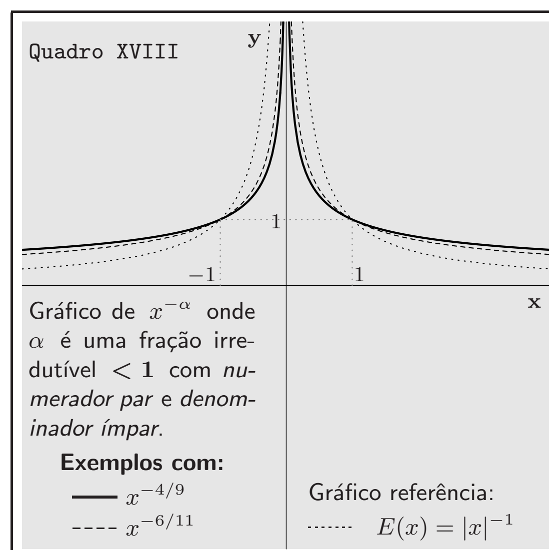
Já no Quadro XIV temos expressões definidas para todo real não nulo mas, trata-se de expressões ímpares. Sendo assim, seus gráficos são simétricos em relação a origem do sistema de coordenadas.

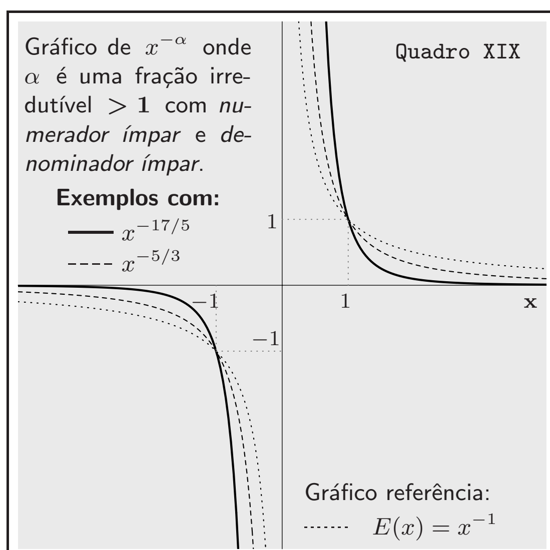


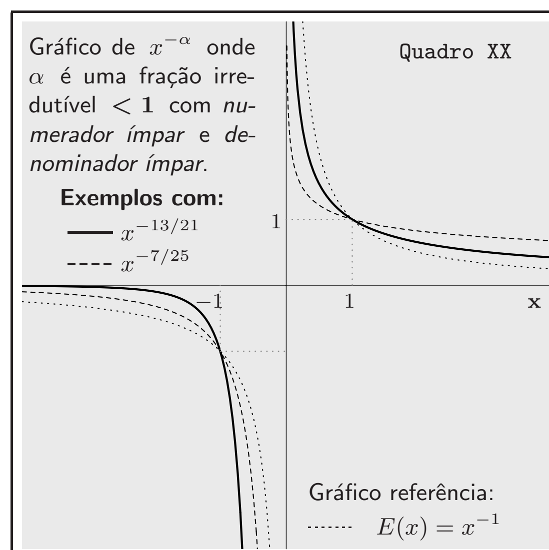


No Quadro XV o domínio das expressões é o intercalo $(0, \infty)$. Para tais expressões não faz sentido falar de simetria em relação ao eixo vertical. No Quadro XVI temos expressões ímpares e nos Quadros XVII e XVIII temos expressões pares, todas elas definidas para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$. Não deixe de comarar os gráficos dos Quadros XVII e XVIII.

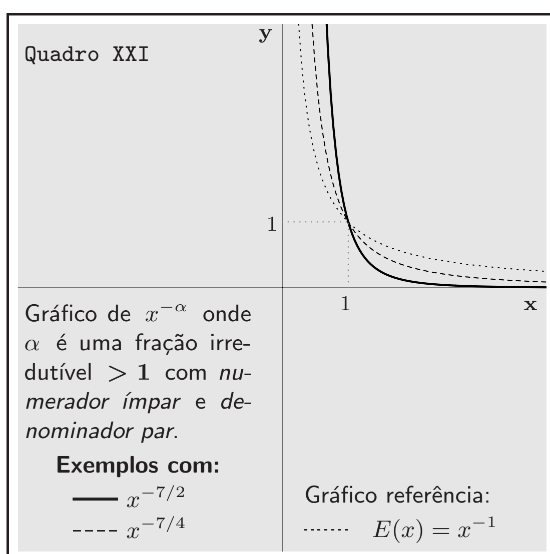


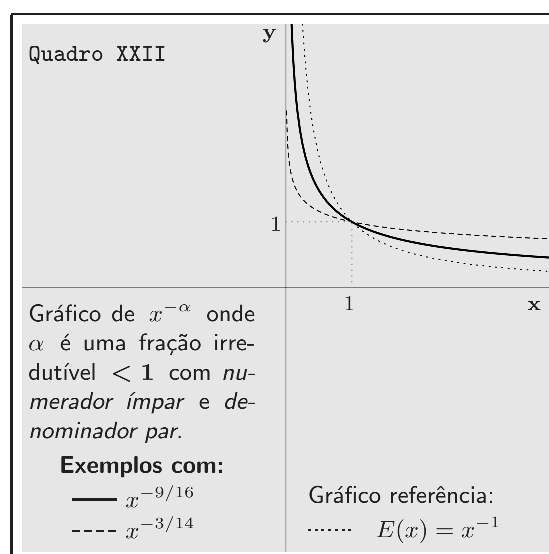




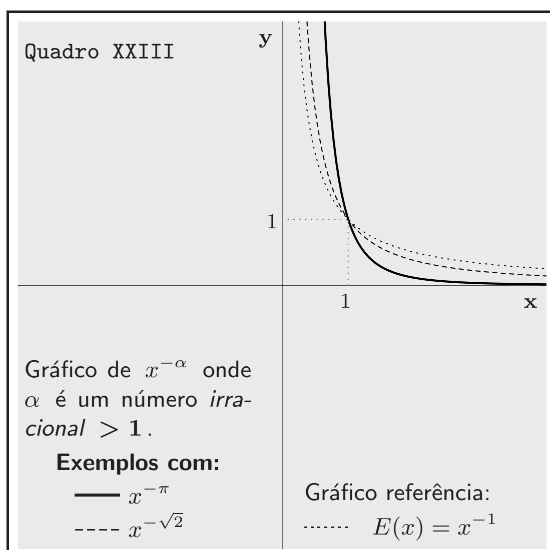


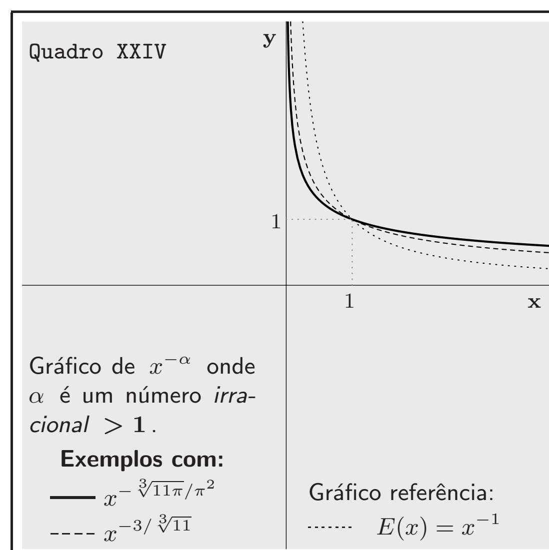
Nos Quadros XIX e XX temos expressões ímpares definidas para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$. Não deixe de comparar os gráficos desses quadros.





Nos Quadros XXI e XXII temos expressões definidas apenas para $x > 0$. Não deixe de comparar os gráficos desses quadros.





Aqui temos expressões definidas apenas para $x > 0$ já que os expoentes são irracionais negativos. Repare a posição relativa dos gráficos nos `Quadros XXIII e XXIV` com relação ao gráfico da expressão $E(x) = x^{-1}$.

4 Gráficos de exponenciais

Uma *exponencial* é uma expressão da forma

$$E(x) = a^x \text{ onde } 1 \neq a > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}\,.$$

Vimos nas propriedades das potências que:

- $\boldsymbol{a > 1}$:

  a^x *cresce* quando $x \in \mathbb{R}$ *cresce* , ou seja,

  a^x é *crescente* em $\mathbb{R}$;

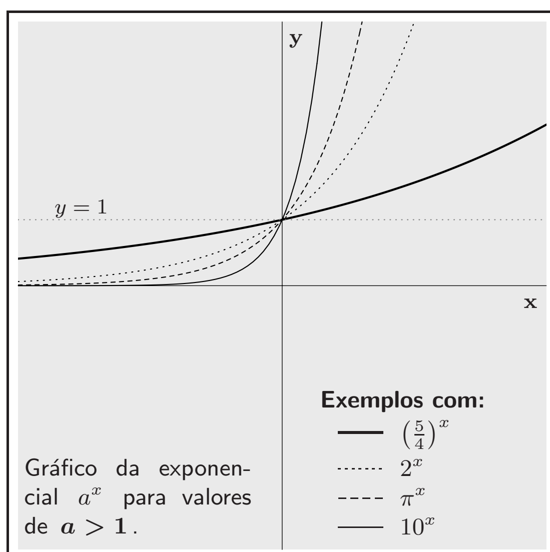
- $\boldsymbol{0 < a < 1}$:

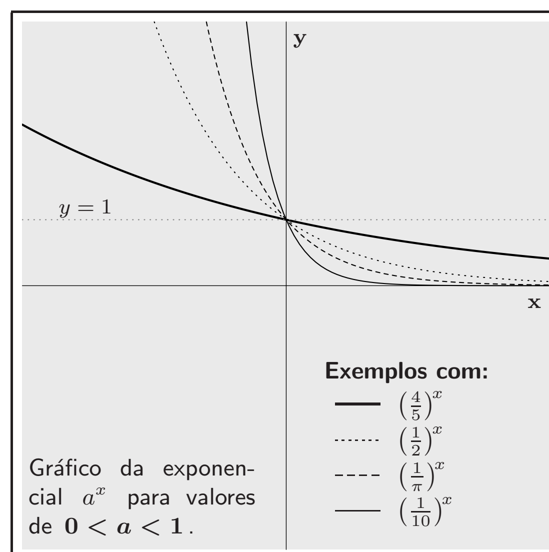
  a^x *decresce* quando $x \in \mathbb{R}$ *cresce* , ou seja,

  a^x é *decrescente* em $x \in \mathbb{R}$.

Note que nos quadros a seguir as expressões estão definidas em toda a reta mas não temos simetria, nem em relação ao eixo vertical, nem em relação a origem.

Compare os gráficos das expressões nos `Quadros XXV e XXVI`.





Além disso, como $\dfrac{5}{4} < 2 < \pi < 10$ segue que:

- Para $x > 0$:
  $\left(\dfrac{5}{4}\right)^x < 2^x < \pi^x < 10^x$
- Para $x < 0$:
  $\left(\dfrac{5}{4}\right)^x > 2^x > \pi^x > 10^x$.

5 Operando sobre gráficos

Agora que sabemos esboçar gráficos de algumas expressões simples podemos sofisticar um pouco mais nosso universo de gráficos construindo novos gráficos a partir de gráficos conhecidos. Podemos fazer isso através de translações verticais e horizontais, simetrias, etc.

Para isso, seja dada uma expressão $E(x)$ e suponhamos que sabemos esboçar o seu gráfico.

5.1 $E(x)$ e $|E(x)|$

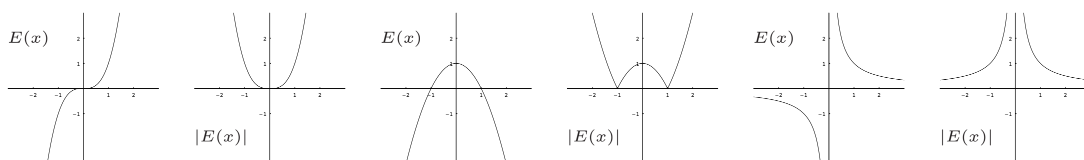
Então sabemos esboçar o gráfico da expressão $|E(x)|$. Isso é feito da seguinte forma:

- Note que o domínio de definição de $E(x)$ e de $|E(x)|$ são os mesmos ;
- Nos pontos do domínio onde $E(x) \geq 0$ temos que $|E(x)| = E(x)$;

- Nos pontos do domínio onde $E(x) < 0$ temos que $|E(x)| = -E(x)$;

Assim, os gráficos de $E(x)$ e de $|E(x)|$ coincidem quando $E(x) \geq 0$ e são simétricos um do outro, em relação ao eixo das abcissas, quando $E(x) < 0$.

Nos quadros abaixo mostramos exemplos dessa operação.

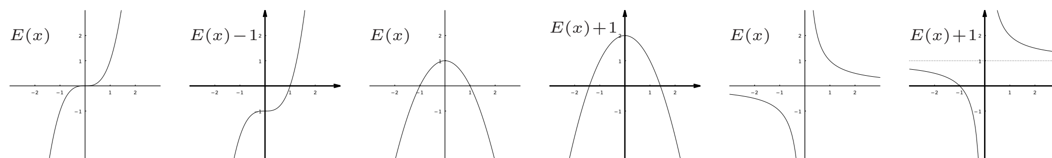


5.2 $E(x)$ e $E(x) + \lambda$

Também sabemos esboçar o gráfico da expressão $E(x)+\lambda$ onde λ é um número real qualquer. Isso é feito da seguinte forma:

- Note que o domínio de definição de $E(x)$ e de $E(x) + \lambda$ são os mesmos ;
- Os pontos do gráfico da expressão $E(x)$ são da forma $\big(x\,, E(x)\big)$ e os da expressão $E(x) + \lambda$ são da forma $\big(x\,, E(x) + \lambda\big)$, isto é, eles são obtidos dos anteriores por uma translação vertical de λ .

Nos quadros abaixo exibimos exemplos dessa operação.



5.3 $E(x)$ e $E(x + \lambda)$

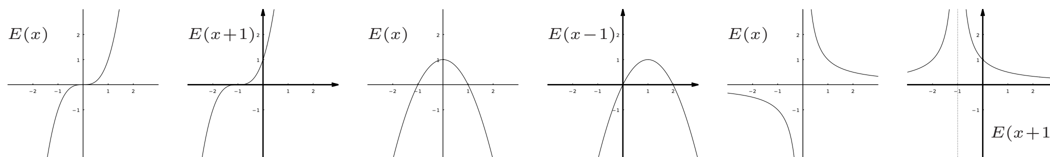
Também sabemos esboçar o gráfico da expressão $E(x+\lambda)$ onde λ é um número real qualquer. Isso é feito da seguinte forma. Primeiramente coloquemos, $F(x) := E(x + \lambda)$.

O que pretendemos agora é esboçar o gráfico da expressão $F(x)$ a partir do gráfico da expressão $E(x)$.

- Sobre o domínio de definição das expressões $E(x)$ e $F(x)$;

  Repare que $F(x)$ faz sentido se, e somente se, $E(x + \lambda)$ faz sentido, ou seja, o domínio de $F(x)$ transladado de λ produz o domínio de $E(x)$. Dito de outra forma, o domínio da expressão $E(x)$ transladando de $-\lambda$ produz o domínio de $F(x)$.
- Da definição de $F(x)$ e do item anterior, concluímos que: $F(x - \lambda) = E(x)$ para todo x no domínio da expressão $E(x)$, ou seja, o gráfico da expressão $F(x)$ é obtido transladando horizontalmente o gráfico de $E(x)$ de $-\lambda$.

Nos quadros abaixo damos exemplos dessa operação.

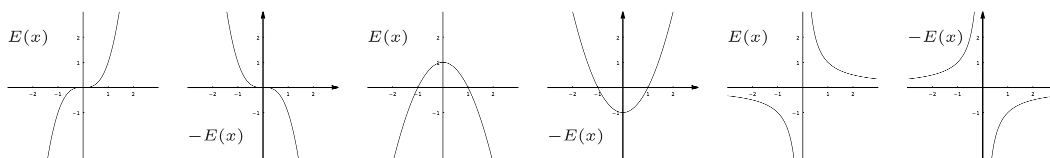


5.4 $E(x)$ e $-E(x)$

Também sabemos esboçar o gráfico da expressão $-E(x)$. Isso é feito da seguinte forma:

- Note que o domínio de definição de $E(x)$ e de $E(x)+\lambda$ são os mesmos ;
- Os pontos do gráfico da expressão $E(x)$ são da forma $\big(x\,,E(x)\big)$ e os da expressão $-E(x)$ são da forma $\big(x\,,-E(x)\big)$, isto é, eles são simétricos em relação ao eixo das abcissas.

A seguir, exibimos exemplos dessa operação.



5.5 $E(x)$ e $E(-x)$

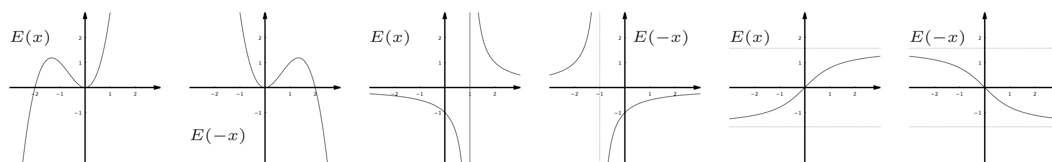
Também sabemos esboçar o gráfico da expressão $E(-x)$. Isso é feito da seguinte forma. Coloquemos, $F(x) := E(-x)$.

O que pretendemos aqui é esboçar o gráfico da expressão $F(x)$ a partir do gráfico da expressão $E(x)$.

- Sobre o domínio de definição das expressões $E(x)$ e $F(x)$;

  Repare que $F(x)$ faz sentido se, e somente se, $E(-x)$ faz sentido, ou seja, o domínio de $F(x)$ é o simétrico, em relação a origem da reta, do domínio de $E(x)$. Dito de outra forma, o domínio da expressão $E(x)$ é o simétrico, em relação a origem da reta, do domínio de $F(x)$.
- Da definição de $F(x)$ e do item anterior, concluímos que: $F(-x)=E(x)$ para todo x no domínio da expressão $E(x)$, ou seja, o gráfico da expressão $F(x)$ é o simétrico do gráfico de $E(x)$ em relação ao eixo das ordenadas.

A seguir, damos exemplos dessa operação.



Exercícios resolvidos

1. **Use a estimativa $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ para mostrar que $2\sqrt[5]{4} < 2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$.**

Solução Das propriedades de potência com base superior a 1 temos que:

$$\begin{aligned} 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 &\iff 2^{1{,}4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1{,}5} \iff 2^{\frac{14}{10}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{15}{10}} \\ &\iff 2^{\frac{7}{5}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} \iff \sqrt[5]{2^7} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt{2^3} \\ &\iff 2\sqrt[5]{4} < 2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

2. **Resolva as equações:**
(a) $5^x = 5^{2x-1}$ (b) $2^{x^2-1} = 1$ (c) $0{,}2^{1-x} = 0{,}2^{2x+1}$ (d) $2^{1-x^2} = 4^{2x+1}$.

Solução Para isso vamos usar as propriedades das potências.

(a) Temos que $0 < 5 \neq 1$. Assim sendo, podemos concluir que:

$$5^x = 5^{2x-1} \iff x = 2x - 1 \iff x = 1 \,. \quad \text{Portanto, } \mathcal{S} = \{1\}.$$

(b) Primeiramente, observemos que: $1 = 2^0$. Como $0 < 2 \neq 1$ segue que:

$$2^{x^2-1} = 1 \iff 2^{x^2-1} = 2^0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1 \,. \quad \text{Logo, } \mathcal{S} = \{\pm 1\} \,.$$

(c) Temos que $0 < 0{,}2 \neq 1$. Assim sendo, resulta que:

$$0{,}2^{1-x} = 0{,}2^{2x+1} \iff 1 - x = 2x + 1 \iff x = 0 \,. \quad \text{Assim, } \mathcal{S} = \{0\} \,.$$

(d) Note que: $4^{2x+1} = (2^2)^{2x+1} = 2^{4x+2}$. Agora, como $0 < 2 \neq 1$ resulta que:

$$\begin{aligned} 2^{1-x^2} = 4^{2x+1} &\iff 2^{1-x^2} = 2^{4x+2} \iff 1 - x^2 = 4x + 2 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3} \,. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathcal{S} = \{-2 \pm \sqrt{3}\}$.

3. **Resolva as equações:**

(a) $|x+1|^{\pi} = 2^{\pi}$ **(b)** $(1+x^2)^{\sqrt{2}} = 2^{1/\sqrt{2}}$ **(c)** $\big(1+|x|\big)^{3/2} = 4\,.$

Solução Para isso, voltemos às propriedades das potências.

(a) Nesse caso, o expoente é positivo e as bases são maiores ou iguais a zero, logo, podemos escrever:

$$|x+1|^{\pi} = 2^{\pi} \iff |x+1| = 2 \iff x+1 = \pm 2 \iff x = 1 \text{ ou } x = -3\,.$$

Logo, $\mathcal{S} = \{1\,, -3\}\,.$

(b) Começamos observando que: $2^{1/\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}/2} = \big(\sqrt{2}\,\big)^{\sqrt{2}}$. Assim, como expoente e base são positivos, teremos:

$$(1+x^2)^{\sqrt{2}} = 2^{1/\sqrt{2}} \iff (1+x^2)^{\sqrt{2}} = \big(\sqrt{2}\,\big)^{\sqrt{2}} \iff 1+x^2 = \sqrt{2} \iff x^2 = \sqrt{2}-1$$
$$\iff x = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\,. \quad \text{Portanto, } \mathcal{S} = \Big\{\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\Big\}.$$

(c) Novamente, como base e expoente são positivos, resulta que:

$$\big(1+|x|\big)^{3/2} = 4 \iff \big(1+|x|\big)^{3/2} = (4^{2/3})^{3/2} = (2^{4/3})^{3/2} \iff 1+|x| = 2^{4/3} = 2\sqrt[3]{2}$$
$$\iff |x| = 2\sqrt[3]{2}-1 \iff x = \pm(2\sqrt[3]{2}-1)\,. \quad \text{Assim, } \mathcal{S} = \{\pm(2\sqrt[3]{2}-1)\}\,.$$

4. **Resolva as equações:**

(a) $(1-x^2)^{7/5} = (x-2)^{7/5}$ **(b)** $(3-|x|)^{2/5} = (2|x|+1)^{2/5}.$

Solução Nesse exercício os expoentes são racionais positivos. Vamos então aplicar a regra para tais expoentes.

(a) Nesse caso temos:

$$(1-x^2)^{7/5} = (x-2)^{7/5} \iff 1-x^2 = x-2 \iff x^2+x-3 = 0$$
$$\iff x = \frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2} \iff x = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\,.$$

Portanto, $\mathcal{S} = \Big\{\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\Big\}.$

(b) Temos que:

$$(3-|x|)^{2/5} = (2|x|+1)^{2/5} \iff 3-|x| = \pm(2|x|+1) \iff 3|x| = 2 \text{ ou } |x| = -4$$
$$\iff |x| = 3/2 \iff x = \pm 3/2\,.$$

Logo, $\mathcal{S} = \{\pm 3/2\}.$

5. **Resolva as equações:**

(a) $x^{-3/5} = (2-x^2)^{-3/5}$ **(b)** $(x^2-x)^{-2/3} = (x^2+x-2)^{-2/3}$.

Solução Nesse exercício as potências têm expoentes racionais mas, negativos. Assim, não podemos ter soluções que anulam uma das bases.

(a) Para resolver $x^{-3/5} = (2-x^2)^{-3/5}$ basta resolver $x = 2-x^2$ e considerar apenas as soluções que não anulam as bases das potências.

Temos então que:

$$x = 2-x^2 \iff x^2+x-2=0 \iff (x+2)(x-1)=0 \iff x=-2 \text{ ou } x=1\,.$$

Além disso, esses valores de x não anulam nem x nem $2-x^2$ que são as bases das potências na equação inicial. Logo, $\mathcal{S} = \{1\,,-2\}$.

(b) Nesse item começamos resolvendo as equações $x^2-x = \pm(x^2+x-2)$:

$$\begin{aligned} x^2-x = \pm(x^2+x-2) &\iff x(x-1) = \pm(x+2)(x-1) \\ &\iff x=1 \text{ ou } x = \pm(x+2) \\ &\iff x=1 \text{ ou } 2x=-2 \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=-1\,. \end{aligned}$$

Voltando à equação inicial $(x^2-x)^{-2/3} = (x^2+x-2)^{-2/3}$ verificamos que $x=1$ anula a base x^2-x . No entanto, $x=-1$ não anula nem x^2-x , nem x^2+x-2 . Consequentemente, $\mathcal{S} = \{-1\}$.

6. **Resolva as equações:**

(a) $4^x+2^x=6$ **(b)** $3^{x+1}+3^{x-1}=10\sqrt{3}$ **(c)** $(\sqrt{5})^{x^2}\times 5^x = \sqrt[3]{5}$.

Solução Vamos usar mudanças de variáveis para resolver as duas primeiras equações.

(a) Temos que: $4^x+2^x=6 \iff 2^{2x}+2^x=6 \iff (2^x)^2+2^x=6$.

Seja $z=2^x$. Assim, a equação acima toma a forma:

$$z^2+z-6=0 \iff (z+3)(z-2)=0 \iff z=2 \text{ ou } z=-3\,.$$

Para voltar a variável inicial devemos fazer:

Passo 1: $z=2$.
Assim,
$2=2^x \iff x=1$.

Passo 2: $z=-3$.
Assim, $-3=2^x$ que não tem solução pois $2^x>0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Portanto, o conjunto solução da equação é $\mathcal{S}=\{1\}$.

(b) Temos que: $3^{x+1}+3^{x-1}=10\sqrt{3} \iff 3\times 3^x+3^x/3=10\sqrt{3}$.

Façamos a mudança de variável $z=3^x$. Com essa nova variável z a equação toma a forma:

$$3z+z/3=10\sqrt{3} \iff 9z+z=3\times 10\sqrt{3} \iff z=3\times 3^{1/2} \iff z=3^{3/2}.$$

Assim: $3^x = 3^{3/2} \iff x = 3/2$. Consequentemente, $\mathcal{S} = \{3/2\}$.

(c) Nesse item, temos que:

$$\left(\sqrt{5}\right)^{x^2} \times 5^x = \sqrt[3]{5} \iff 5^{x^2/2} \times 5^x = 5^{1/3} \iff x^2/2 + x = 1/3 \iff 3x^2 + 6x - 2 = 0$$
$$\iff x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+24}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3}$$
$$\iff x = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}\,.$$

Consequentemente, $\mathcal{S} = \left\{ -1 \pm \sqrt{\dfrac{5}{3}} \right\}$.

7. **Quais das afirmações a seguir são verdadeiras ?**

(a) $\mathbf{5^{2/3} > 5^{3/4}}$ **(b)** $\mathbf{1{,}01^{0{,}31} > 1{,}01^{0{,}3}}$ **(c)** $\mathbf{\left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}3} > \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}4}}$ **(d)** $\mathbf{\sqrt[3]{11} > \sqrt[5]{11^2}}$.

Solução Para isso, vamos usar as propriedades que permitem comparar potências.

(a) Temos que $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ pois $8 < 9$. Assim, como a base $b = 5 > 1$ segue que $b^{2/3} < b^{3/4}$, ou seja, $5^{2/3} < 5^{3/4}$. Portanto, a afirmação é **falsa**.

(b) Nesse caso temos que $0{,}31 > 0{,}3$. Como a base $b = 1{,}01 > 1$ segue que $b^{0{,}31} > b^{0{,}3}$, ou seja, $1{,}01^{0{,}31} > 1{,}01^{0{,}3}$. Portanto, a afirmação é **verdadeira**.

(c) Temos que $0{,}3 < 0{,}4$. Logo, $-0{,}3 > -0{,}4$. Como $b = \sqrt{2} > 1$, segue que $b^{-0{,}3} > b^{-0{,}4}$, isto é, $\left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}3} > \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}4}$. Consequentemente, a afirmação é **verdadeira**.

(d) Temos que $\sqrt[3]{11} = 11^{1/3}$ e $\sqrt[5]{11^2} = 11^{2/5}$. Por outro lado, temos que $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ pois $5 < 6$. Assim, como $b = 11 > 1$ segue que $b^{1/3} < b^{2/5}$, ou seja, $11^{1/3} < 11^{2/5}$. Mostramos assim que $\sqrt[3]{11} < \sqrt[5]{11^2}$ e portanto, a afirmação em questão é **falsa**.

8. **Coloque em ordem crescente os seguintes números:**

(a) $\mathbf{\sqrt[3]{7}\ ;\ 2\sqrt{2}\ ;\ 7/4\ ;\ \pi/2}$

(b) $\mathbf{0{,}3^{\sqrt[3]{7}}\ ;\ 0{,}3^{2\sqrt{2}}\ ;\ 0{,}3^{7/4}\ ;\ 0{,}3^{\pi/2}}$

(c) $\mathbf{\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt[3]{7}}\ ;\ \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/2\sqrt{2}}\ ;\ \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{4/7}\ ;\ \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{2/\pi}}$.

Solução Novamente, vamos usar as propriedades que permitem comparar potências.

(a) Com uma máquina de calcular podemos obter as seguintes desigualdades:

$$\pi/2 < 7/4 < \sqrt[3]{7} < 2\sqrt{2}\,.$$

Vamos agora demonstrá-las, usando nossos argumentos.

Temos que:

$$\pi/2 < 7/4 \iff \pi < 7/2 \iff \pi < 3{,}5\,.$$

Isso mostra que a primeira desigualdade é verdadeira, pois $\pi < 3{,}2 < 3{,}5$.

Passemos agora à prova da desigualdade $7/4 < \sqrt[3]{7}$:

$$\frac{7}{4} < \sqrt[3]{7} \iff 7 < 4\sqrt[3]{7} \iff 7^3 < 4^3 \times 7 \iff 7^2 < 4^3 \iff 49 < 64$$

o que mostra que a desigualdade $7/4 < \sqrt[3]{7}$ é verdadeira.

A desigualdade $\sqrt[3]{7} < 2\sqrt{2}$ é verdadeira pois, $\sqrt[3]{7} < 2 < 2\sqrt{2}$.

Evidentemente, para resolver esta questão não precisávamos usar uma máquina de calcular. Apenas teríamos um pouco mais de trabalho para estabelecer as comparações.

(b) Como $\pi/2 < 7/4 < \sqrt[3]{7} < 2\sqrt{2}$ e a base $b = 0{,}3 < 1$ segue que:

$$b^{\pi/2} > b^{7/4} > b^{\sqrt[3]{7}} > b^{2\sqrt{2}} \quad \text{ou seja} \quad 0{,}3^{\pi/2} > 0{,}3^{7/4} > 0{,}3^{\sqrt[3]{7}} > 0{,}3^{2\sqrt{2}}.$$

(c) Nesse caso, precisamos saber se $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ é maior ou menor do que 1. Para isso, comecemos com a desigualdade a seguir:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < 1 \iff 2-\sqrt{3} < \sqrt{3}-\sqrt{2} \iff 2+\sqrt{2} < 2\sqrt{3} \iff 4+2+4\sqrt{2} < 12$$

$$\iff 4\sqrt{2} < 6 \iff 2\sqrt{2} < 3 \iff 8 < 9\,.$$

Isso mostra que a fração acima é menor do que 1. Por outro lado, de $\pi/2 < 7/4 < \sqrt[3]{7} < 2\sqrt{2}$ segue que

$$2/\pi > 4/7 > 1/\sqrt[3]{7} > 1/2\sqrt{2}\,.$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{2/\pi} < \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{4/7} < \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt[3]{7}} < \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/2\sqrt{2}}.$$

9. **Coloque em ordem crescente os seguintes números:**

(a) $-\pi^2$; $-12{,}01$; $-\sqrt{63}$; -3π

(b) $4^{-\pi^2}$; $4^{-12,01}$; $4^{-\sqrt{63}}$; $4^{-3\pi}$

(c) $\left(3-\sqrt{5}\right)^{-\pi^2}$; $\left(3-\sqrt{5}\right)^{-12,01}$; $\left(3-\sqrt{5}\right)^{-\sqrt{63}}$; $\left(3-\sqrt{5}\right)^{-3\pi}$.

Solução Façamos como no exercício anterior.

(a) Fazendo estimativas desses números numa máquina de calcular, podemos obter a seguinte ordenação:

$$\sqrt{63} < 3\pi < \pi^2 < 12{,}01\,.$$

Vamos agora mostrar, com os nossos argumentos, que elas são verdadeiras.

Temos que: $\sqrt{63} < 8 < 9 < 3\pi < \pi^2 < (3{,}2)^2 = 10{,}24 < 12{,}01$. Segue então que

$$-\sqrt{63} > -3\pi > -\pi^2 > -12{,}01\,.$$

(b) Como a base $b = 4 > 1$ resulta que: $b^{-\sqrt{63}} > b^{-3\pi} > b^{-\pi^2} > b^{-12{,}01}$ ou seja,

$$4^{-\sqrt{63}} > 4^{-3\pi} > 4^{-\pi^2} > 4^{-12{,}01}.$$

(c) Nesse item precisamos saber se $3 - \sqrt{5}$ é maior ou igual a 1 . Temos que

$$\begin{aligned} 2 < \sqrt{5} < 3 \quad &\iff \quad -2 > -\sqrt{5} > -3 \quad \iff \quad 3-2 > 3-\sqrt{5} > 3-3 \\ &\iff \quad 1 > 3 - \sqrt{5} > 0\,. \end{aligned}$$

Assim, temos que $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$. Logo,

$$\left(3-\sqrt{5}\right)^{-\sqrt{63}} < \left(3-\sqrt{5}\right)^{-3\pi} < \left(3-\sqrt{5}\right)^{-\pi^2} < \left(3-\sqrt{5}\right)^{-12{,}01}.$$

10. Resolva as inequações:

(a) $\mathbf{2^{x^2-3} < 2^{2x}}$ **(b)** $\mathbf{0{,}5^{|x|-1} > \sqrt{0{,}5}}$ **(c)** $\mathbf{0{,}2^{3x} \le 0{,}2^{x^2}}$ **(d)** $\mathbf{4^x - 6 \times 2^x + 8 \le 0}$**.**

Solução Vamos resolver essas inequações lançando mão das propriedades de potência que aprendemos. No entanto, podemos resolvê-las com os argumentos desenvolvidos na Lição 12 pois todas as expressões associadas às inequações desse exercício são expressões que *variam continuamente* em seus domínios de definição.

(a) A base $b = 2 > 1$. Logo, podemos escrever:

$$2^{x^2-3} < 2^{2x} \quad \iff \quad x^2 - 3 < 2x \quad \iff \quad x^2 - 2x - 3 < 0\,.$$

Resolvendo a inequação $x^2 - 2x - 3 < 0$:

Temos que:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \iff \quad (x-3)(x+1) = 0 \quad \iff \quad x = 3 \ \text{ ou } \ x = -1$$

Como o coeficiente do termo do segundo grau vale $1 > 0$, segue que $x^2 - 2x - 3 < 0$ quando, e somente quando $-1 < x < 3$. Portanto,

$$2^{x^2-3} < 2^{2x} \quad \iff \quad x \in (-1\,,3\,)\,.$$

(b) Nesse item a base $0 < b = 0{,}5 < 1$. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 0{,}5^{|x|-1} > \sqrt{0{,}5} \quad &\iff \quad 0{,}5^{|x|-1} > 0{,}5^{1/2} \quad \iff \quad |x| - 1 < 1/2 \quad \iff \quad |x| < 3/2 \\ &\iff \quad x \in (-3/2\,, 3/2\,)\,. \end{aligned}$$

(c) Aqui, a base $0 < b = 0{,}2 < 1$. Logo:

$$0{,}2^{3x} \le 0{,}2^{x^2} \iff 3x \ge x^2 \iff x^2 - 3x \le 0 \iff x(x-3) \le 0 \iff x \in [\,0\,,3\,]\,.$$

(d) Com a mudança de variável $z = 2^x$ a inequação $4^x - 6 \times 2^x + 8 \le 0$ toma a forma:

$$z^2 - 6z + 8 \le 0 \iff (z-4)(z-2) \le 0 \iff 2 \le z \le 4\,.$$

Voltando a variável inicial, obtemos:

$$4^x - 6 \times 2^x + 8 \le 0 \iff 2 \le 2^x \le 4 \iff 2^1 \le 2^x \le 2^2 \iff 1 \le x \le 2\,.$$

11. **Quais das afirmações a seguir são verdadeiras ?**

(a) $3{,}1^{2{,}1} > 3{,}01^{2{,}1}$ **(b)** $0{,}01^{-0{,}3} < 0{,}1^{-0{,}3}$ **(c)** $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-0{,}3} > \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}2}$ **(d)** $\left(\frac{4}{7}\right)^{\pi} < \left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$.

Solução Passemos à comparação dessas potências.

(a) Temos que $3{,}1 > 3{,}01$. Assim, como o expoente $\alpha = 2{,}1 > 0$ segue que $3{,}1^{\alpha} > 3{,}01^{\alpha}$, ou seja, $3{,}1^{2{,}1} > 3{,}01^{2{,}1}$. Portanto, a afirmação é **verdadeira**.

(b) Nesse caso temos que $0{,}01 < 0{,}1$. Assim, como o expoente $\alpha = -0{,}3 < 0$ segue que $0{,}01^{\alpha} > 0{,}1^{\alpha}$, ou seja, $0{,}01^{-0{,}3} > 0{,}1^{-0{,}3}$. Portanto, a afirmação é **falsa**.

(c) Temos que

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-0{,}3} = 5^{-0{,}3/3} = 5^{-0{,}1} \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}2} = 2^{-0{,}2/2} = 2^{-0{,}1}$$

Nesse caso, o expoente $\alpha = -0{,}1 < 0$ e $5 > 2$. Logo, $5^{\alpha} < 2^{\alpha}$, isto é, $5^{-0{,}1} < 2^{-0{,}1}$. Consequentemente,

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-0{,}3} < \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}2}$$

mostrando que a afirmação é **falsa**.

(d) Temos que $\frac{4}{7} > \frac{2}{5}$ pois $20 > 14$. O expoente $\alpha = \pi > 0$. Segue então que $(4/7)^{\alpha} > (2/5)^{\alpha}$, isto é,

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{\pi} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$$

demonstrando assim que a afirmação é **falsa**.

12. **Qual o maior dos números:** $\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt[3]{7}}$ **ou** $\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{2/\pi}$ **?**

Solução Para responder essa pergunta, precisamos comparar os expoentes e saber se a base é maior do que 1 ou se está entre 0 e 1.

Vejamos:

- Sobre os expoentes, temos que:
  $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}} < \dfrac{2}{\pi} \iff \dfrac{\pi}{2} < \sqrt[3]{7} \iff \pi < 2\sqrt[3]{7} \iff \pi^3 < 8 \times 7 \iff \pi^3 < 56.$
  Para verificar que essa última desigualdade é verdadeira, lembremos que:

  $$\pi < 3{,}2 \iff \pi^3 < (3{,}2)^3 = 32{,}768\,.$$

  Agora, podemos concluir que $\pi^3 < 56$ e, conseqüentemente, acabamos de demonstrar que

  $$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} < \frac{2}{\pi}\,. \qquad (16.1)$$

- Sobre a base, temos que[1]

  $$\begin{aligned} \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < 1 &\iff 2-\sqrt{3} < \sqrt{3}-\sqrt{2} \iff 2+\sqrt{2} < 2\sqrt{3} \\ &\iff 4+4\sqrt{2}+2 < 4\times 3 \iff 4\sqrt{2} < 6 \\ &\iff 2\sqrt{2} < 3 \iff 8 < 9 \end{aligned}$$

  demonstrando que, de fato,

  $$0 < \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < 1. \qquad (16.2)$$

Agora, de (16.1) e (16.2) podemos concluir que

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt[3]{7}} > \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{2/\pi}.$$

13. Qual o maior dos números: $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{3}+\sqrt{8-\sqrt{60}}$?

Solução Para responder essa pergunta façamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} < \sqrt{3}+\sqrt{8-\sqrt{60}} &\iff \sqrt{5}-\sqrt{3} < \sqrt{8-\sqrt{60}} \iff 5-2\sqrt{15}+3 < 8-\sqrt{60} \\ &\iff \sqrt{60} < 2\sqrt{15} \iff \sqrt{60} < \sqrt{60} \end{aligned}$$

Por outro lado, trocando o sinal de " $<$ " pelo de " $>$ " obteremos:

$$\sqrt{5} > \sqrt{3}+\sqrt{8-\sqrt{60}} \iff \sqrt{60} > \sqrt{60}$$

Isso nos garante que esses dois números são iguais.

[1] Note que o numerador e o denominador da fração são positivos.

14. Coloque em ordem crescente os seguintes números:

(a) $\sqrt{7}$; 3 ; $2{,}5$; π

(b) $\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{2}}$; $3^{\sqrt{2}}$; $2{,}5^{\sqrt{2}}$; $\pi^{\sqrt{2}}$

(c) $\left(\sqrt{7}\right)^{-0,1}$; $3^{-0,1}$; $2{,}5^{-0,1}$; $\pi^{-0,1}$

(d) $\left(\sqrt{7}\right)^{\pi-\sqrt{11}}$; $3^{\pi-\sqrt{11}}$; $2{,}5^{\pi-\sqrt{11}}$; $\pi^{\pi-\sqrt{11}}$.

Solução Deixemos de lado a ajuda da máquina de calcular.

(a) Temos que $2{,}5 = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2}$. Agora, para comparar $5/2$ e $\sqrt{7}$ fazemos:

$$\frac{5}{2} < \sqrt{7} \iff 5 < 2\sqrt{7} \iff 25 < 28$$

mostrando assim que $2{,}5 < \sqrt{7}$.

Por outro lado, temos que: $\sqrt{7} < 3 < \pi$. Resulta então que:

$$2{,}5 < \sqrt{7} < 3 < \pi\,.$$

(b) Como $2{,}5 < \sqrt{7} < 3 < \pi$ e o expoente $\alpha = \sqrt{2} > 0$ segue que

$$2{,}5^{\sqrt{2}} < \left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{2}} < 3^{\sqrt{2}} < \pi^{\sqrt{2}}\,.$$

(c) Nesse caso, como o expoente $\alpha = -0,1 < 0$ teremos:

$$2{,}5^{-0,1} > \left(\sqrt{7}\right)^{-0,1} > 3^{-0,1} > \pi^{-0,1}\,.$$

(d) Para ordenar os números desse item precisamos apenas saber se o expoente $\alpha = \pi - \sqrt{11}$ é ou não positivo. Para analizar o sinal de $\pi - \sqrt{11}$ começamos com a desigualdade:

$$\pi < \sqrt{11} \iff \pi^2 < 11\,.$$

Assim, para mostrar que $\pi < \sqrt{11}$ basta mostrar que $\pi^2 < 11$.

No entanto, sabemos que: $\pi < 3{,}2$. Consequentemente, $\pi^2 < 3{,}2^2 = 10{,}24 < 11$. Sendo assim, concluímos que $\pi < \sqrt{11}$ e consequentemente, $\alpha = \pi - \sqrt{11} < 0$. Portanto,

$$2{,}5^{\alpha} > \left(\sqrt{7}\right)^{\alpha} > 3^{\alpha} > \pi^{\alpha} \quad \text{ou seja} \quad 2{,}5^{\pi-\sqrt{11}} > \left(\sqrt{7}\right)^{\pi-\sqrt{11}} > 3^{\pi-\sqrt{11}} > \pi^{\pi-\sqrt{11}}.$$

15. Qual o domínio e o quadro de sinais da expressão $(5-2x)^{2,1515\ldots}$?

Solução Para responder essa pergunta vamos, primeiramente, determinar a fração irredutível que é *geratriz* da dízima periódica $2{,}1515\ldots$

Para isso, seja $z = 2{,}1515\ldots$

Assim, $100\,z = 215{,}1515\ldots$ e teremos:

$$100\,z - z = 215{,}1515\ldots - 2{,}1515\ldots = 215 + 0{,}1515\ldots - 2 - 0{,}1515\ldots = 215 - 2 = 213.$$

Resulta daí que

$$99\,z = 213 \iff z = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}.$$

Portanto, a fração irredutível que é geratriz da dízima em questão é a fração $71/33$. Nesse caso, a expressão $(2-x)^{1,1717\ldots}$ toma a forma

$$(5-2x)^{2,1515\ldots} = (5-2x)^{71/33} = \sqrt[33]{(5-2x)^{71}} \qquad (16.3)$$

a qual está bem definida para todos os valores reais da variável x já que o índice da raiz na expressão acima é ímpar. Assim sendo, a expressão $(5-2x)^{2,1515\ldots}$ está bem definida em toda a reta $\mathbb{R}$.

A expressão à direita em (16.3) também nos garante que o sinal de $(5-2x)^{2,1515\ldots}$ é o mesmo sinal de $5-2x$, ou seja, sobre a expressão $(5-2x)^{2,1515\ldots}$ podemos garantir que:

- se anula apenas em $x = 5/2$;
- é positiva em $(-\infty\,, 5/2\,)$;
- é negativa em $(\,5/2\,, \infty\,)$.

16. Qual deve ser o quadro de sinais da expressão $\dfrac{x^{\sqrt{2}} - x^{\pi}}{x-2}$ **?**

Solução Nessa expressão temos que:

- O denominador se anula quando, e somente quando, $x = 2$;
- O numerador só está bem definido para $x \geq 0$ pois os expoentes são irracionais;
- O numerador se anula quando, e somente quando, $x = 0$ ou $x = 1$.

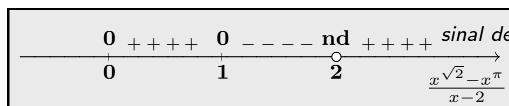
  Além disso, como $\sqrt{2} < \pi$, concluímos que:
- $x^{\sqrt{2}} < x^{\pi}$ quando $x > 1 \iff x^{\sqrt{2}} - x^{\pi} < 0$ quando $x > 1$;
- $x^{\sqrt{2}} > x^{\pi}$ quando $0 < x < 1 \iff x^{\sqrt{2}} - x^{\pi} > 0$ quando $0 < x < 1$.

Assim, os quadros de sinais de $x-2$ e $x^{\sqrt{2}} - x^{\pi}$ são da forma:

sinal de $x-2$	
+ + + + + + + + + + + + + + **0** − − − −	**2**

sinal de $x^{\sqrt{2}} - x^{\pi}$		
0 + + + + **0** − − − − − − − −	**0**	**1**

Conseqüentemente, segue das informações acima que o domínio de definição da expressão $\dfrac{x^{\sqrt{2}} - x^{\pi}}{x-2}$ é o conjunto $[\,0\,,2) \cup (\,2\,,\infty)$ e seu quadro de sinais é mostrado a seguir.



17. **Qual deve ser o quadro de sinais da expressão $\dfrac{8^x - \pi^{2x}}{1-x}$?**

Solução Temos que

$$\frac{8^x - \pi^{2x}}{1-x} = \frac{8^x - (\pi^2)^x}{1-x} \quad \text{para} \quad x \neq 1.$$

Consideremos então a expressão

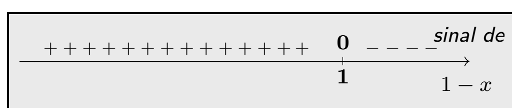
$$\frac{8^x - (\pi^2)^x}{1-x}.$$

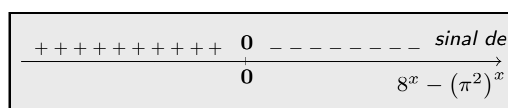
Nessa expressão temos que:

- O denominador se anula quando, e somente quando, $x = 1$;
- O numerador está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ pois as bases das potências envolvidas são positivas ;
- O numerador se anula quando, e somente quando, $x = 0$ pois duas exponenciais de bases distintas coincidem se, e somente se, o expoente de cada uma delas se anula ;

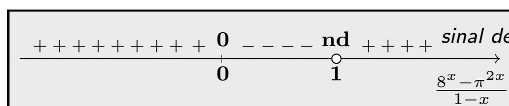
  Além disso, como $8 < \pi^2$, concluímos que:
- $8^x < \left(\pi^2\right)^x$ quando $x > 0 \iff 8^x - \left(\pi^2\right)^x < 0$ quando $x > 0$;
- $8^x > \left(\pi^2\right)^x$ quando $x < 0 \iff 8^x - \left(\pi^2\right)^x > 0$ quando $x < 0$.

Assim, os quadros de sinais de $1 - x$ e $8^x - \left(\pi^2\right)^x$ são da forma:





Donde concluímos que o quadro de sinais de $\dfrac{8^x - \pi^{2x}}{1-x}$ é dado por:



18. **Resolva as inequações:**

(a) $|x-2|^{-\pi} > 3^{-\pi}$ **(b)** $\left(1+x^2\right)^2 \leq \sqrt[3]{2}$

(c) $\left(3+x^2\right)^{\sqrt{2}} \leq (2x^2+1)^{\sqrt{2}}$ **(d)** $(3x)^{2/3} \geq (x^2+2)^{2/3}$.

Solução Vamos resolver as três primeiras dessas inequações usando as propriedades de potência que aprendemos. Resolveremos a última delas usando a técnica desenvolvida na Lição 12. Todas as expressões associadas às inequações desse exercício também são expressões que *variam continuamente*.

(a) Note que a expressão à esquerda do sinal da desigualdade não está bem definida para $x = 2$.
Para $x \neq 2$ as bases são positivas e:

$$|x-2|^{-\pi} > 3^{-\pi} \iff |x-2| < 3 .$$

Por outro lado: $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -1 < x < 5 .$
Portanto, o conjunto solução da inequação em estudo é $\mathcal{S} = (-1\,,5\,) - \{2\} = (-1\,,2\,) \cup (\,2\,,5\,)$.

(b) Temos que $\left(1+x^2\right)^2 \leq \sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = \left(\sqrt[6]{2}\,\right)^2$ onde bases e expoentes são positivos. Logo,

$$\left(1+x^2\right)^2 \leq \left(\sqrt[6]{2}\,\right)^2 \iff 1+x^2 \leq \sqrt[6]{2} \iff x^2 - \left(\sqrt[6]{2}-1\right) \leq 0$$

Do estudo de sinal de trinômios, concluímos[2] então que o conjunto solução é o intervalo

$$\mathcal{S} = \left[\,-\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\,,\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\,\right].$$

(c) Nessa inequação, expoentes e bases são positivos, logo:

$$\left(3+x^2\right)^{\sqrt{2}} \leq (2x^2+1)^{\sqrt{2}} \iff 3+x^2 \leq 2x^2+1 \iff 2 \leq x^2 \iff x^2-2 \geq 0 .$$

Novamente, do estudo de sinal de trinômios, obtemos que

$$\mathcal{S} = (-\infty\,,-\sqrt{2}\,] \cup [\,\sqrt{2}\,,\infty) .$$

(d) Nessa inequação os expoentes são positivos mas a base do membro esquerdo da inequação pode assumir valores negativos. Para resolvê-la vamos usar os argumentos[3] desenvolvidos na Lição 12. Para isso, devemos estudar o sinal da expressão associada a inequação, qual seja

$$(3x)^{2/3} - (x^2-2)^{2/3}$$

cujo domínio de definição é toda a reta.

Estudo do sinal de $(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}$:

☞ Resolvendo a equação $(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3} = 0$:

$$\begin{aligned} (3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3} = 0 &\iff (3x)^{2/3} = (x^2+2)^{2/3} \iff 3x = \pm(x^2+2) \\ &\iff x^2-3x+2=0 \text{ ou } x^2+3x+2=0 \\ &\iff (x-1)(x-2)=0 \text{ ou } (x+1)(x+2)=0 \end{aligned}$$

---

[2] Note que $\sqrt[6]{2}-1>0$ e portanto, $\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}$ está bem definido.
[3] Você também pode tentar resolver essa inequação observando que

$$(3x)^{2/3} \geq (x^2+2)^{2/3} \iff (3|x|)^{2/3} \geq |x^2+2|^{2/3}.$$

Repare que a inequação à esquerda possui expoente positivo e bases maiores ou iguais a zero.

Portanto, a equação associada só se anula no conjunto $\mathcal{S} = \{-2\,,-1\,,1\,,2\}$.

0	**0**	**0**	**0**	*Domínio de*
$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	**1**	**2**	$(3x)^{\frac{2}{3}} - (x^2+2)^{\frac{2}{3}}$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-2\,)$:
Em $x = -3 \in (-\infty\,,-2\,)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big|_{x=-3} = (-9)^{2/3} - 11^{2/3} = 9^{2/3} - 11^{2/3} < 0\ (-)$.

☞ Teste de sinal em $(-2\,,-1\,)$:
Em $x = -4/3 \in (-2\,,-1\,)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big|_{x=-4/3} = (-4)^{\frac{2}{3}} - (\frac{16}{9}+2)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{36}{9}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{34}{9}\right)^{\frac{2}{3}} > 0\ (+)$.

☞ Teste de sinal em $(-1\,,1\,)$:
Em $x = 0 \in (-1\,,1\,)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big|_{x=0} = 0 - 2^{2/3} < 0\ (-)$.

☞ Teste de sinal em $(\,1\,,2\,)$:
Em $x = 4/3 \in (\,1\,,2\,)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big|_{x=4/3} = 4^{\frac{2}{3}} - (\frac{16}{9}+2)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{36}{9}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{34}{9}\right)^{\frac{2}{3}} > 0\ (+)$.

☞ Teste de sinal em $(\,2\,,\infty)$:
Em $x = 3 \in (\,2\,,\infty)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big|_{x=3} = 9^{\frac{2}{3}} - 11^{\frac{2}{3}} < 0\ (-)$.

Finalizando o estudo do sinal:

$--$	**0**	$+++$	**0**	$--------$	**0**	$+++$	**0**	$---$ *sinal de*
	$\mathbf{-2}$		$\mathbf{-1}$		**1**		**2**	$(3x)^{\frac{2}{3}} - (x^2+2)^{\frac{2}{3}}$

Conclusão:

$$(3x)^{2/3} \geq (x^2+2)^{2/3} \iff x \in [-2\,,-1\,] \cup [\,1\,,2\,]\,.$$

19. Considere a seguinte lista:

$$\frac{1}{x^4} \quad ; \quad x^{5/2} \quad ; \quad \sqrt[3]{x^5} \quad ; \quad x^{\frac{3}{4}} \quad ; \quad x^{\pi/2} \quad ; \quad x^{-2\sqrt{2}}.$$

(a) Coloque esta lista em ordem crescente para $x \in (0\,,1)$;

(b) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões

$$1/x^4 \quad \text{e} \quad x^{-2\sqrt{2}}\,;$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões;

(c) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões

$$\sqrt[3]{x^5} \quad , \quad x^{\frac{3}{4}} \quad , \quad x^{5/2} \quad \text{e} \quad x^{\pi/2}\,;$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões.

Solução Coloquemos a lista $1/x^4 \;;\; x^{5/2} \;;\; \sqrt[3]{x^5} \;;\; x^{\frac{3}{4}} \;;\; x^{\pi/2} \;;\; x^{-2\sqrt{2}}$ na forma

$$x^{-4} \quad ; \quad x^{5/2} \quad ; \quad x^{5/3} \quad ; \quad x^{3/4} \quad ; \quad x^{\pi/2} \quad ; \quad x^{-2\sqrt{2}}.$$

(a) Temos a seguinte ordenação dos expoentes:

$$-4 \;<\; -2\sqrt{2} \;<\; -1 \;<\; 0 \;<\; \frac{3}{4} \;<\; 1 \;<\; \frac{\pi}{2} \;<\; \frac{5}{3} \;<\; \frac{5}{2} \quad \text{pois} \tag{16.4}$$

- $-4 < -2\sqrt{2} \iff 2\sqrt{2} < 4 \iff 4 \times 2 < 16\,;$
- $-2\sqrt{2} < -1 \iff 1 < 2\sqrt{2}\,;$
- $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{5}{3} \iff \pi < \dfrac{10}{3} \iff \pi < 3{,}333\ldots\,;$
- $\dfrac{5}{3} < \dfrac{5}{2} \iff 10 < 15\,;$

e as outras desigualdades envolvidas são elementares.

Por outro lado, sabemos que mantida a base, quanto maior for o expoente, menor será a potência se a base estiver entre 0 e 1. Sendo assim, segue da ordenação dada em (16.5) que

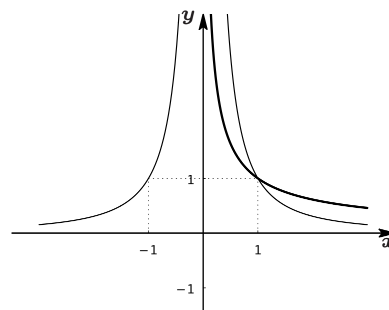
$$x^{-4} > x^{-2\sqrt{2}} > x^{-1} > 1 > x^{\frac{3}{4}} > x > x^{\frac{\pi}{2}} > x^{\frac{5}{3}} >^{\frac{5}{2}} \quad \text{quando} \quad x \in (\,0\,,1\,)$$

o que finaliza a solução do item (a).

(b) Para as expressões x^{-4} e $x^{-2\sqrt{2}}$ temos:

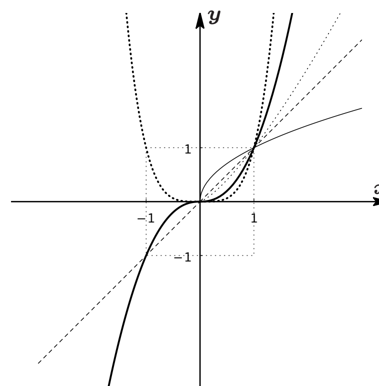
- x^{-4} só não está bem definido para $x = 0$. Além disso, $(-x)^{-4} = (-1)^{-4}x^{-4} = x^{-4}$ o que mostra que a expressão x^{-4} é uma expressão par ;
- $x^{-2\sqrt{2}}$ só está bem definido para $x > 0$ já que o expoente é irracional e negativo ;
- Para $x \in (\,0\,,1\,)$ temos $x^{-4} > x^{-2\sqrt{2}}$;
- Para $x \in (\,1\,,\infty)$ temos $x^{-4} < x^{-2\sqrt{2}}$.

Temos então a seguinte comparação entre os gráficos de x^{-4} (traço fino) e $x^{-2\sqrt{2}}$ (traço espesso) mostrada na figura ao lado.



(c) Para as expressões $x^{3/4}$, $x^{\pi/2}$, $x^{5/3}$ e $x^{8/3}$ temos:

- $x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$ que só está bem definido para $x \geq 0$ já que a raiz é de índice par;
- $x^{\pi/2}$ só está bem definido para $x \geq 0$ já que o expoente é um irracional positivo ;

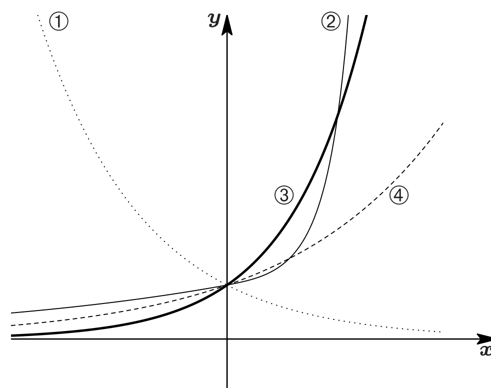


- $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$ que está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ já que a raiz é de índice ímpar;
  Além disso,
  $(-x)^{5/3} = \sqrt[3]{(-x)^5} = \sqrt[3]{-x^5} = \sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{x^5} = -\sqrt[3]{x^5}$
  o que mostra que a expresão $x^{5/3}$ é ímpar ;
- $x^{8/3} = \sqrt[3]{x^8}$ que está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ já que a raiz é de índice ímpar;
  Além disso,
  $(-x)^{8/3} = \sqrt[3]{(-x)^8} = \sqrt[3]{(-1)^8 x^8} = \sqrt[3]{x^8}$
  o que mostra que a expressão $x^{8/3}$ é par ;
- Para $x \in (0\,,1)$ temos $x^{\frac{3}{4}} > x^{\frac{\pi}{2}} > x^{\frac{5}{3}} > x^{\frac{8}{3}}$;
- Para $x \in (1\,,\infty)$ temos $x^{\frac{3}{4}} < x^{\frac{\pi}{2}} < x^{\frac{5}{3}} < x^{\frac{8}{3}}$.

A comparação entre os gráficos de $x^{3/4}$ (traço fino) , x (tracejado) , $x^{\pi/2}$ (pontilhado) , $x^{5/3}$ (traço espesso) e $x^{8/3}$ (pontilhado espesso) é mostrada na figura acima.

20. Dentre os quatro gráficos ao lado, três deles são os gráficos das exponenciais 2^x , $(\sqrt{2})^x$ e $0{,}61^x$. Quais são esses gráficos ? Porque o gráfico que você não escolheu, de fato, não é gráfico de uma exponencial ?

Solução



A exponencial $(0{,}61)^x$ é uma expressão decrescente já que sua base $0{,}61$ é positiva e menor do que 1. Conseqüentemente, o único gráfico da lista dada que pode representá-la é o de número ①.
Por sua vez, as exponenciais 2^x e $(\sqrt{2})^x$ são expressões crescentes já que suas bases são maiores do que 1 e devem ser representadas por dois dentre os gráficos que restaram (②, ③ e ④).
Tais gráficos são gráficos de expressões crescentes, que tendem a ∞ quando $x \to \infty$ e que tendem a zero quando $x \to -\infty$. Essas são propriedades que toda exponencial com base maior do que 1 possui.

No entanto, os gráficos de duas exponenciais com bases distintas só se intersectam em um único ponto, a saber, quando $x = 0$. Portanto, os gráficos de número ② e ③ não podem ser os gráficos de 2^x e $(\sqrt{2})^x$ respectivamente. Pela mesma razão ② e ④ também não podem ser gráficos das exponenciais 2^x e $(\sqrt{2})^x$. Logo, os gráficos de 2^x e $(\sqrt{2})^x$ só podem ser representados pelos gráficos ③ e ④ respectivamente.

21. Considere a seguinte lista: $x^{-2/3}$; $x^{3/2}$; $\sqrt[5]{x^4}$; $\sqrt[3]{x^7}$; $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$.

(a) Coloque esta lista em ordem crescente para $x \in (0\,,1)$;

**(b) Dê os domínios e esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões $x^{-2/3}$ e $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$;
Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões ;**

(c) Dê os domínios e esboce (num mesmo quadro) os gráficos das expressões

$$x^{3/2} \quad , \quad \sqrt[5]{x^4} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{x^7}\,;$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões.

Solução Coloquemos a lista $x^{-2/3}$; $x^{3/2}$; $\sqrt[5]{x^4}$; $\sqrt[3]{x^7}$; $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$ na forma

$$x^{-2/3} \quad ; \quad x^{3/2} \quad ; \quad x^{4/5} \quad ; \quad x^{7/3} \quad ; \quad |x|^{-\sqrt[3]{2}}.$$

(a) Para os expoentes, temos a seguinte ordenação:

$$-\frac{2}{3} < -\sqrt[3]{2} < -1 < 0 < \frac{4}{5} < 1 < \frac{3}{2} < \frac{7}{3} \quad \text{pois} \tag{16.5}$$

- $-\frac{3}{2} < -\sqrt[3]{2} \iff \sqrt[3]{2} < \frac{3}{2} \iff 2\sqrt[3]{2} < 3 \iff 16 < 27\,;$
- $-\sqrt[3]{2} < -1 \iff 1 < \sqrt[3]{2}\,;$
- $\frac{4}{5} < 1 \iff 4 < 5\,;$
- $1 < \frac{3}{2} \iff 2 < 3\,;$
- $\frac{3}{2} < \frac{7}{3} \iff 9 < 14.$

Por outro lado, sabemos que mantida a base, quanto maior for o expoente, menor será a potência se a base estiver entre 0 e 1. Sendo assim, segue da ordenação dada em (16.5) que

$$x^{\frac{7}{3}} < x^{\frac{3}{2}} < x < x^{\frac{4}{5}} < 1 < x^{-1} < x^{-\sqrt[3]{2}} < x^{-2/3} \quad \text{quando} \quad x \in (0\,,1)$$

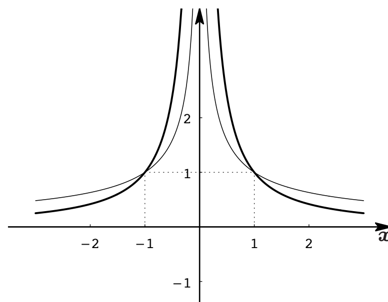
o que finaliza a solução do item (a) de forma mais precisa do que solicitado.

(b) Para as expressões $x^{-2/3}$ e $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$ temos:

- $x^{-2/3} = \dfrac{1}{x^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ que só não está bem definido quando $x = 0$ pois a raiz envolvida na expressão tem índice ímpar. Portanto, o domínio dessa expressão é $\mathbb{R} - \{0\}$.
  Além disso,
  $(-x)^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(-x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-2/3}$ o que mostra que a expressão é par.
- $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$ está bem definido para todo $x \neq 0$ já que a base, nesse caso $(x \neq 0)$, é positiva. Logo, o domínio dessa expressão é $\mathbb{R} - \{0\}$.
  Além disso, temos que:
  $|-x|^{-\sqrt[3]{2}} = |x|^{-\sqrt[3]{2}}$ o que mostra que essa expressão também é uma expressão par.
- Para $x \in (0\,,1)$ temos $x^{-2/3} > x^{-\sqrt[3]{2}}$;

- Para $x \in (1,\infty)$ temos $x^{-2/3} < x^{-\sqrt[3]{2}}$.

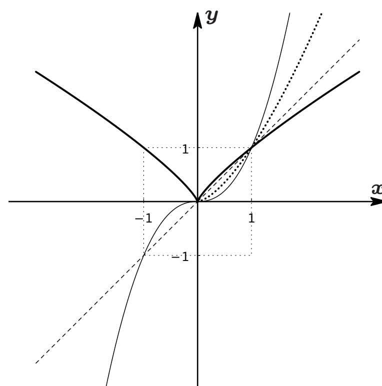
Temos então a seguinte comparação entre os gráficos de $x^{-2/3}$ (traço fino) e $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$ (traço espesso) mostrada na figura abaixo.



Para as expressões $x^{4/5}$, $x^{3/2}$ e $x^{7/3}$ temos:

- $x^{4/5} = \sqrt[5]{x^4}$ que está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ já que a raiz é de índice ímpar. Logo, o domínio dessa expressão é toda a reta $\mathbb{R}$.
  Além disso:
  $(-x)^{4/5} = \sqrt[5]{(-x)^4} = \sqrt[5]{x^4} = x^{4/5}$ mostrando assim que trata-se de uma expressão par ;
- $x^{3/2} = \sqrt{x^3}$ só está bem definido para $x \geq 0$ já que a raiz é de índice par e o radicando é uma potência ímpar de x. Portanto, o domínio dessa expressão é o intervalo $[0,\infty)$.
- $x^{7/3} = \sqrt[3]{x^7}$ que está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ já que a raiz é de índice ímpar. Consequentemente, o domínio dessa expressão é toda a reta.
  Além disso,
  $(-x)^{7/3} = \sqrt[3]{(-x)^7} = \sqrt[3]{-x^7} = \sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{x^7} = -\sqrt[3]{x^7} = -x^{7/3}$
  o que mostra que a expresão $x^{7/3}$ é ímpar.
- Para $x \in (0,1)$ temos $x^{\frac{4}{5}} > x > x^{\frac{3}{2}} > x^{\frac{7}{3}}$;
- Para $x \in (1,\infty)$ temos $x^{\frac{4}{5}} < x < x^{\frac{3}{2}} < x^{\frac{7}{3}}$.

Temos então a seguinte comparação entre os gráficos de $x^{4/5}$ (traço espesso) , x (tracejado) , $x^{3/2}$ (pontilhado espesso) e $x^{7/3}$ (traço fino) :



22. **Considere a seguinte lista:**

$$\sqrt[7]{x^4} \quad ; \quad x^{-2{,}4} \quad ; \quad x^{\frac{9}{5}} \quad ; \quad x^{-\pi}.$$

(a) Coloque esta lista em ordem crescente para $x \in (1, \infty)$;

(b) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões $|x|^{-1}$, $x^{-\pi}$ e $x^{-2{,}4}$. Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões;

(c) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões

$$x \quad , \quad -x \quad , \quad \sqrt[7]{x^4} \quad \text{e} \quad x^{9/5} \, ;$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões.

Solução Coloquemos a lista $\sqrt[7]{x^4}$; $x^{-2{,}4}$; $x^{\frac{9}{5}}$; $x^{-\pi}$ na forma

$$x^{4/7} \quad ; \quad x^{-2{,}4} \quad ; \quad x^{9/5} \quad ; \quad x^{-\pi}.$$

(a) Para os expoentes, temos a seguinte ordenação:

$$-\pi < -2{,}4 < -1 < 0 < \frac{4}{7} < 1 < \frac{9}{5}. \qquad (16.6)$$

Por outro lado, sabemos que mantida a base, quanto maior for o expoente, maior será a potência se a base for maior do que 1. Sendo assim, segue da ordenação dada em (16.6) que

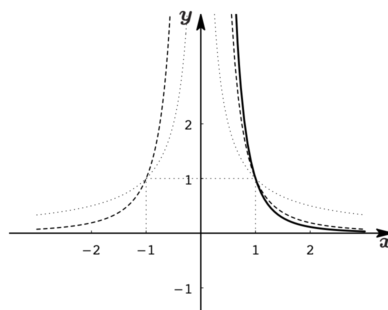
$$x^{-\pi} < x^{-2{,}4} < x^{-1} < 1 < x^{\frac{4}{7}} < x < x^{\frac{9}{5}} \quad \text{quando} \quad x \in (1, \infty)$$

o que finaliza a solução do item (a).

(b) Para as expressões $|x|^{-1}$, $x^{-\pi}$ e $x^{-2{,}4}$ temos:

- $|x|^{-1}$ só não está bem definido para $x = 0$.
  Além disso, $|-x|^{-1} = x^{-1}$ o que mostra que a expressão $|x|^{-1}$ é par ;
- $x^{-\pi}$ só está bem definido para $x > 0$ já que o expoente é irracional e negativo ;
- $x^{-2{,}4} = x^{-\frac{24}{10}} = 1/x^{\frac{12}{5}} = 1/\sqrt[5]{x^{12}}$ que só não está bem definida para $x = 0$.
  Além disso, temos que:
  $(-x)^{-2{,}4} = 1/\sqrt[5]{(-x)^{12}} = 1/\sqrt[5]{x^{12}} = x^{-2{,}4}$ o que garante que essa expressão é par.
- Para $x \in (1, \infty)$ temos $x^{-\pi} < x^{-2{,}4} < x^{-1}$;
- Para $x \in (0, 1)$ temos $x^{-\pi} > x^{-2{,}4} > x^{-1}$.

Temos então a seguinte comparação entre os gráficos de $x^{-\pi}$ (traço contínuo), o de $x^{-2{,}4}$ (tracejado) e o de $|x|^{-1}$ (pontilhado) mostrada na figura abaixo.



(c) Para as expressões x , $-x$, $\sqrt[7]{x^4}$ e $x^{9/5}$ temos:

- $\sqrt[7]{x^4}$ está bem definida em toda a reta já que a raiz é de índice ímpar.

  Além disso temos que: $\sqrt[7]{(-x)^4} = \sqrt[7]{x^4}$ o que mostra que ela é uma expressão par ;

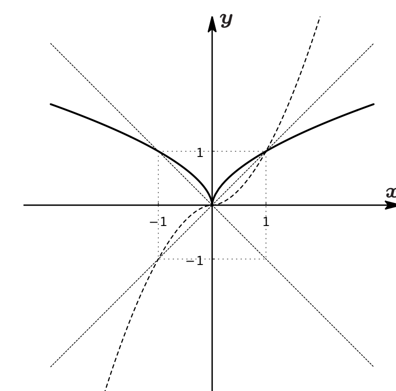
- $x^{9/5} = \sqrt[5]{x^9}$ também está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ pela mesma razão.

  Temos também que: $(-x)^{9/5} = \sqrt[5]{(-x)^9} = \sqrt[5]{-x^9} = -\sqrt[5]{x^9} = -x^{9/5}$ mostrando assim que a expressão é ímpar.

- Para $x \in (1, \infty)$ temos $x^{4/7} < x < x^{9/5}$;

- Para $x \in (0, 1)$ temos $x^{4/7} > x > x^{9/5}$.

A comparação entre os gráficos de x , $-x$, $\sqrt[7]{x^4}$ e $x^{9/5}$ é mostrada na figura abaixo.



Em ordem crescente no intervalo $(1, \infty)$ temos: $\sqrt[7]{x^4}$, x e $x^{9/5}$.

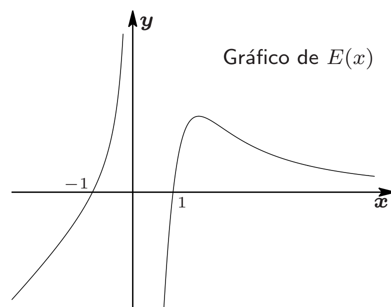
23. **Na figura ao lado é dado o gráfico de uma expressão $E(x)$ cujo domínio é toda a reta menos a origem. Construa os gráficos de**

(a) $E(x)$ e $|E(x)|$;

(b) $E(x)$ e $E(x+2)$;

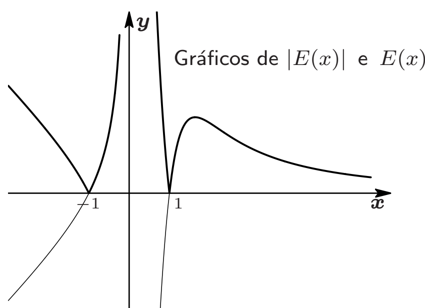
(c) $E(x)$ e $E(|x|)$.

Em cada item, faça os dois gráficos num mesmo quadro e dê as indicações necessárias para diferenciar com clareza esses dois gráficos. Para itens distintos use quadros distintos.

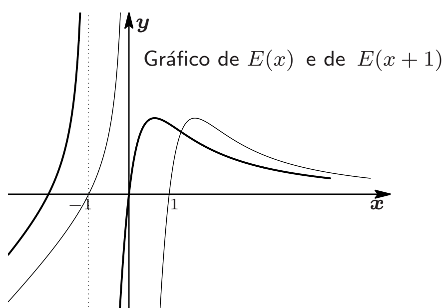


Solução Vamos construir os gráfico solicitados a partir do gráfico da expressão $E(x)$.

(a) O gráfico de $|E(x)|$ é obtido mantendo-se o gráfico de $E(x)$ onde $E(x)$ é maior ou igual a zero e refletindo-se esse gráfico em relação ao eixo das abcissas onde ele é negativo. Na figura abaixo superpomos os gráfico de $E(x)$ (traço fino) e de $|E(x)|$ (traço espesso). Note que esses gráficos coincidem sobre os intervalos $[-1\,,0\,)$ e $[\,1\,,\infty)$.

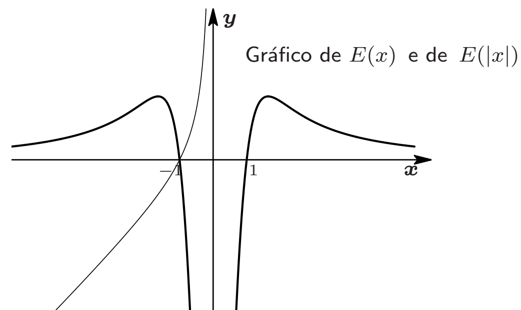


(b) O gráfico da expressão $E(x+1)$ é obtido transladando de -1 o gráfico de $E(x)$ na direção do eixo das abcissas. No quadro abaixo superpomos os gráficos de $E(x)$ (traço fino) e de $E(x+1)$ (traço espesso).



(c) Note que $E(|-x|) = E(|x|)$. Isso significa que a expressão $E(|x|)$ é par. Consequentemente, o gráfico de $E(|x|)$ coincide com o gráfico de $E(x)$ quando $x > 0$ e é o seu refletido em relação ao eixo das ordenadas quando $x < 0$.

Na figura abaixo superpomos os gráficos de $E(x)$ (traço fino) e de $E(|x|)$ (traço espesso). Como já observamos, esses gráficos coincidem quando $x > 0$.



Exercícios

1. Resolva as equações:
(1) $2^x = 128$ (2) $3^x = 65$
(3) $5^x = 1/625$ (4) $3^{2x-1} = 81$
(5) $7^{4x-5} = 7^3$ (6) $4^{3x} = 64$
(7) $3^{2x+3} = 27$ (8) $27^{3x-1} = 243\,.$

2. Seja $a > 0$. Resolva as equações:
(1) $(a^x)^x = (a^9)^4$ (2) $(a^x)^3 = (a^x)^x$
(3) $\sqrt[x]{a} = a^x$ (4) $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}\,.$

3. Resolva as equações:
(a) $2^{3^{4^x}} = 512$
(b) $3^{x+1} - 3^{x-1} + 3^{x-3} - 3^{x-4} = 654$
(c) $\dfrac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}} = 3^{4-x-\frac{1}{x}}$
(d) $\dfrac{13}{12} = \dfrac{208}{3 \times 2^{1-x}}$
(e) $2^{2x+1} + 3 \times 2^{x+1} = 8$
(f) $\dfrac{1}{2^{x-x^2}} = 1\,.$

4. Determine as soluções de $5^{2x} - 7 \times 5^x + 10 = 0\,.$

5. Resolva a equação
$3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + 3^{x-5} = 1092\,.$

6. Resolva $4^{x+1} + \dfrac{64}{4^x} = 257.$

7. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras?
(1) $2^{0,3} < 2^{0,4}$ (2) $(1/2)^{0,5} < (1/2)^{0,6}$
(3) $3^0 < 3^{0,2}$ (4) $(1/3)^{\sqrt{2}} > 1/3)^{1,4}$
(5) $3^{\sqrt{3}} > 3$ (6) $0{,}2^{\sqrt{2}} > 0{,}2$
(7) $\pi^{-2} < \pi^2$ (8) $(1/5)^{-5} > (1/5)^5$
(9) $3^{-\frac{1}{5}} > 1$ (10) $(3/7)^{-1,5} < 1$
(11) $(1/7)^2 > 1$ (12) $3^{-0,001} < 0$
(13) $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5}$ (14) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}\,.$

8. Resolva as inequações a seguir.
(a) $2^x > 1$
(b) $\left(\frac{5}{4}\right)^x \geq 1$
(c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$
(d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \geq 1$
(e) $3^x \leq 1$
(f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x \leq 1\,.$

9. Resolva as equações:
(a) $|x+1|^{x^2-2x-2} = 0\,;$
(b) $|x-2|^{x^3-2x^2-2x} = 1\,.$

10. Use um software apropriado para fazer os gráficos das expressões

$$E(x) = 2/x \text{ e de } F(x) = 1/\sqrt[5]{2x}\,.$$

Verifique em quais intervalos uma domina a outra.

11. Idem para $E(x) = 2/x$ e $F(x) = 1/3\sqrt[7]{2x}\,.$

12. Em quais intervalos uma expressão domina a outra?
(a) $y = x^{2/3}$ e $y = x^{5/7}$
(b) $y = x^{-7/5}$ e $y = x^{-29/18}$
(c) $y = |x|^{\pi/\sqrt{2}}$ e $y = |x|^{\sqrt{11/2}}$
(d) $y = \pi^x$ e $y = \pi^{2x}$
(e) $y = \pi^x$ e $y = \pi^{x^2}$
(f) $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{3x}$ e $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{2x}$
(g) $y = x^{-\sqrt{2}}$ e $y = x^{-\sqrt[3]{3}}$
(h) x^x e 1
(i) $y = |x|^x$ e $y = |x|^{2x}$
(j) $y = (-x)^x$ e $y = (-x)^{x/2}.$

13. Use um software apropriado para esboçar o gráfico das expressões do exercício anterior e compare o resultado obtido com a sua solução.

14. Coloque em ordem crescente os seguintes números:

(a) 1 ; $2/\sqrt{3}$; $5/3$; $\pi/\sqrt[3]{2}$
(b) $0{,}5$; $0{,}5^{2/\sqrt{3}}$; $0{,}5^{5/3}$; $0{,}5^{\pi/\sqrt[3]{2}}$
(c) 5 ; $5^{2/\sqrt{3}}$; $5^{5/3}$; $5^{\pi/\sqrt[3]{2}}$
(d) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{2/\sqrt{3}}$
$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{5/3}$; $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{\pi/\sqrt[3]{2}}$.

15. Coloque em ordem crescente:
(a) $-\pi^2$; $-9,2$; $-\sqrt{82}$; $-\pi/\sqrt{0{,}5}$
(b) $5^{-\pi^2}$; $5^{-9{,}2}$; $5^{-\sqrt{82}}$; $5^{-\pi/\sqrt{0{,}5}}$
(c) $0{,}2^{-\pi^2}$; $0{,}2^{-9{,}2}$; $0{,}2^{-\sqrt{82}}$; $0{,}2^{-\pi/\sqrt{0{,}5}}$
(d) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^{-\pi^2}$; $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^{-9{,}2}$;
$(\sqrt{7}-\sqrt{3})^{-\sqrt{82}}$; $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^{-\pi/\sqrt{0{,}5}}$.

16. Resolva as inequações:
(a) $|x+1|^{-3} \geq 4^{-3}$
(b) $(2+x^4)^{\sqrt[3]{3}} \leq (x^2+2)^{\sqrt[3]{3}}$
(c) $(1-x^2)^{3/2} \geq \sqrt[3]{2}$
(d) $(2x)^{2/5} < (3x^2+1)^{2/5}$.

17. Resolva as inequações a seguir, usando o método de estudo de sinais das expressões associadas.
(a) $|x-1|^x - 2^{2x}$
(b) $(2+3x^2)^{3/2} - x^3$
(c) $(2-3x)^{5/3} + x^{10/3}$.

18. Resolva a equação $9^{x^2} \times 3^{2x} = 27$.

19. Resolva a inequação $9^{x^2} \times 3^{2x} \leq 27$ usando as propriedades de desigualdade de potências.

20. Resolva a inequação $9^{x^2} \times 3^{2x} = 27$ usando o método de estudo de sinais da expressão associada. Aqui também, a expressão associada varia continuamente em todo o seu domínio de definição.

21. Seja $a \in \mathbb{R}$. Resolva a equação

$$x^{\frac{3}{2a}} - 8x^{-\frac{3}{2a}} = 7$$

22. Construa num mesmo quadro o gráfico das expressões a seguir, explicitando o domínio de cada uma delas e em quais intervalos cada uma domina as outras:

$$x^{2/3} \quad ; \quad x^{3/5} \quad ; \quad x^{\pi/4} \quad ; \quad x^{\sqrt{2}/\sqrt{3}}$$

23. Faça o mesmo para as expressões

$$x^{3/2} \quad ; \quad x^{5/3} \quad ; \quad x^{4/\pi} \quad ; \quad x^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$$

24. Idem para as expressões

$$x^{-2/3} \quad ; \quad x^{-3/5} \quad ; \quad x^{-\pi/4} \quad ; \quad x^{-\sqrt{2}/\sqrt{3}}$$

25. Idem para as expressões

$$x^{-3/2} \quad ; \quad x^{-5/3} \quad ; \quad x^{-4/\pi} \quad ; \quad x^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$$

26. Use um software adequado para fazer o gráfico das expressões listadas nos quatro últimos exercícios para conferir as suas soluções.

27. Dê o domínio, esboce o gráfico das expressões e compare-as em intervalos adequados:

$$2^x \quad ; \quad 2^{2x} \quad ; \quad 3^x \quad ;$$

28. Seja $a \in \mathbb{R}$. Dê o domínio e esboce o gráfico da expressão $E(x)$ dada a seguir, dividindo a análise em casos adequados, segundo os valores do parâmetro a :

$$E(x) = x^{a^2-2}.$$

29. Dê o domínio, esboce o gráfico das expressões e compare-as em intervalos adequados:

$$2^{-x} \quad ; \quad 2^{-2x} \quad ; \quad 3^{-x} \quad ;$$

30. Seja $a \in \mathbb{R}$. Dê o domínio e esboce o gráfico da expressão $E(x)$ dada a seguir, dividindo a análise em casos adequados, segundo os valores do parâmetro a :

$$E(x) = 2^{\,ax^2-2}.$$

31. Considere a seguinte lista:

$$x^{\sqrt{3}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\pi} \quad ; \quad x^{-4} \quad ; \quad \sqrt[3]{x^2}.$$

(a) Coloque essa lista em ordem crescente para $x \in (0\,,1)$;

(b) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos de

$$|x| \quad , \quad x^{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{x^2}\,.$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões listadas acima;

(c) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos de

$$x^{-1} \quad , \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\pi} \quad \text{e} \quad x^{-4}\,.$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões listadas acima.

32. Considere a seguinte lista:

$$x^{\sqrt{5}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\pi} \quad ; \quad x^{-12} \quad ; \quad \sqrt[5]{x^3}.$$

(a) Coloque essa lista em ordem crescente para $x \in (\,0\,,1\,)$;

(b) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos de

$$|x| \quad , \quad x^{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \sqrt[5]{x^3}\,.$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões listadas acima;

(c) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos de

$$|x|^{-1} \quad , \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\pi} \quad \text{e} \quad x^{-12}\,.$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões listadas acima.

33. Dê o domínio e esboce o gráfico das expressões a seguir. Explique como obter o gráfico dessas expressões a partir do gráfico da primeira delas.

(a) 2^x (b) $2^x - 1$
(c) $2^{|x|}$ (d) 2^{-x}
(e) 2^{2+x} (f) $2^{2+|x|}$
(g) -2^x (h) $1 - 2^x$.

34. Dê o domínio e esboce o gráfico das expressões a seguir. Explique como obter o gráfico dessas expressões a partir do gráfico da primeira delas.

(a) $x^{3/2}$ (b) $x^{3/2} - 1$
(c) $|x|^{3/2}$ (d) $(-x)^{3/2}$
(e) $(2 - x)^{3/2}$ (f) $(2 + |x|)^{3/2}$
(g) $-x^{3/2}$ (h) $2 - x^{3/2}$.

17

Progressões e séries

Considere a dízima periódica $2{,}2222\ldots$ Podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$2{,}2222\ldots = 2 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + 0{,}00002 + \cdots$$

Ou ainda, podemos escrevê-la como:

$$2{,}22222\ldots = 2 + 2\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2} + 2\times 10^{-3} + 2\times 10^{-4} + 2\times 10^{-5} + \cdots$$

que representa a soma de todos os termos de uma *progressão geométrica* de *primeiro termo* 2 e *razão* 10^{-1}.

1 Progressão geométrica

Uma *progressão geométrica* (ou *pg*) de *razão* r e *primeiro termo* b é a lista ordenada

$$b \ ; \ br \ ; \ br^2 \ ; \ br^3 \ ; \ \ldots \ ; \ br^{n-1} \ ; \ br^n \ ; \ br^{n+1} \ ; \ \ldots$$

O termo br^n é dito o *termo geral* da progressão.

Note que numa progressão geométrica com termo inicial[1] $b \neq 0$ e razão[2] $r \neq 0$, o quociente entre um dado termo e o seu antecessor é igual a razão, isto é: $br^{n+1} \div br^n = r$ para todo

[1] Se o termo inicial de uma progressão geométrica é nulo então todos os termos da progressão são nulos.
[2] Se a razão de uma progressão geométrica é nula então a progressão tem a forma $b\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \cdots$.

inteiro $n \geq 0$. Essa, não só é uma maneira de determinar a razão numa progressão geométrica dada, como também serve para verificar se a progressão é, de fato, uma progressão geométrica.

A soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é:

$$S_n = \underbrace{b + br + br^2 + br^3 + \cdots + br^{n-1}}_{n \text{ termos}} .$$

Assim,

$$\begin{array}{rl} S_n &= b + br + br^2 + br^3 + \cdots + br^{n-1} \\ rS_n &= br + br^2 + br^3 + br^4 + \cdots + br^n \\ \hline S_n - rS_n &= b - br^n . \end{array}$$

Consequentemente, quando $r \neq 1$ temos[3] que:

$$S_n = b \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad \text{para todo } n \geq 1 . \tag{17.1}$$

A medida que o número n de termos aumenta, o único fator da expressão (17.1) que se altera é o fator r^n. Se a razão r satisfaz a condição $\mathbf{-1 < r < 1}$ então r^n se aproxima cada vez mais de zero a medida que n cresce indefinidamente. Conseqüentemente, $b\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ se aproxima cada vez mais de $b\left(\frac{1}{1-r}\right)$ quando n cresce indefinidamente. Sendo assim, entenderemos que a expressão

$$b \times \frac{1}{1 - r}$$

representa a soma de todos os termos de uma progressão geométrica de termo inicial $b \in \mathbb{R}$ e razão $r \in (-1\,,1\,)$, e escrevemos

$$b + br + br^2 + \cdots + br^n + \cdots = \frac{b}{1 - r} \quad \text{quando} \quad \mathbf{-1 < r < 1} \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{R} .$$

Esses são os únicos valores da razão para os quais faz sentido a soma de todos os termos de uma progressão geométrica com termo inicial não nulo.

Em resumo, quando r é um número real qualquer, dizemos que

$$b + br + br^2 + \cdots + br^n + \cdots$$

é uma *série geométrica*[4].

[3] Quando a razão $r = 1$, a progressão geométrica tem a forma $b\ ;\ b\ ;\ b\ ;\ \cdots$ e, consequentemente, a soma S_n dos seus n primeiros termos vale $S_n = nb$.

[4] Também usamos as notações $\sum_{n \geq 0} br^n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} br^n$ ou $b + \sum_{n=1}^{\infty} br^n$ no lugar de $b + br + br^2 + \cdots + br^n + \cdots$.

- Quando $|r| < 1$ dizemos que a série geométrica é *convergente* (ou *somável*) e que sua *soma* vale $\dfrac{b}{1-r}$.
- Quando $|r| \geq 1$ dizemos que a série geométrica é *divergente* (ou *não somável*), a menos que $b = 0$.

Exemplos

❄ $1 \;;\; \dfrac{1}{2} \;;\; \dfrac{1}{2^2} \;;\; \dfrac{1}{2^3} \;;\; \dfrac{1}{2^4} \;;\; \dfrac{1}{2^5} \;;\; \cdots$
é uma progressão geométrica cujo primeiro termo vale 1 e cuja razão vale $1/2$.

❄ $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^5} + \cdots$
é uma série geométrica convergente pois sua razão r vale $r = \frac{1}{2} \in (-1\,,1)$. Além disso, temos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2\,.$$

❄ $2 \;;\; 2\pi \;;\; 2\pi^2 \;;\; 2\pi^3 \;;\; 2\pi^4 \;;\; 2\pi^5 \;;\; \cdots$
é uma progressão geométrica de razão π e termo inicial 2 . A soma dos seus n primeiros termos vale

$$S_n = 2 \times \frac{1-\pi^n}{1-\pi} = 2 \times \frac{\pi^n - 1}{\pi - 1} = \frac{2}{\pi - 1}(\pi^n - 1)\,.$$

A série geométrica correspondente $2 + 2\pi + 2\pi^2 + 2\pi^3 + 2\pi^4 + 2\pi^5 + \cdots$ é não somável pois sua razão $r = \pi > 1$.

❄ $3 \;;\; -3 \;;\; 3 \;;\; -3 \;;\; 3 \;;\; -3 \;;\; \cdots$
é uma progressão geométrica tendo 3 como primeiro termo e cuja razão vale -1 . A soma S_n dos seus n primeiros termos vale:

$$S_n = \begin{cases} 3 & \text{quando } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{quando } n \text{ é par}\,. \end{cases}$$

Aqui também, a série geométrica correspondente é não somável pois a razão $r = -1$.

❄ $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^4} - \dfrac{1}{3^5} + \cdots$
é uma série geométrica convergente pois sua razão r vale $r = -\frac{1}{3} \in (-1\,,1)$. Além disso, temos:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \cdots = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}\,.$$

❄ A série geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ tem razão $r = x$. Logo, ela é somável quando $|x| < 1$ e sua soma vale:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}\,.$$

Além disso, $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ não é somável quando $|x| \geq 1$.

❄ A série geométrica $1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\left(\frac{z}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\cdots$ tem razão $r=z/2$. Portanto, ela é convergente quando $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, ou seja, quando $|z|<2$ e temos:

$$1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\left(\frac{z}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\cdots=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{2}{2-z}\,.$$

Sabemos também que $1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\left(\frac{z}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\cdots$ diverge quando $|z|\geq 2$.

❄ Considere a dízima periódica $2{,}222\ldots$ Temos que:

$$2{,}222\ldots=2+2\times 10^{-1}+2\times 10^{-2}+2\times 10^{-2}+\cdots$$

que representa uma série geométrica convergente já que sua razão vale 10^{-1}. Além dissso, temos que:

$$2{,}222\ldots=2+2\times 10^{-1}+2\times 10^{-2}+2\times 10^{-2}+\cdots=\frac{2}{1-10^{-1}}=\frac{2\times 10}{10-1}=\frac{20}{9}\,.$$

2 Progressão aritmética

Outro tipo de progressão é a *progressão aritmética*.

Uma *progressão aritmética* (ou *pa*) de *razão* r e *primeiro termo* b é a lista ordenada

$$b\ ;\ b+r\ ;\ b+2r\ ;\ b+3r\ ;\ \ldots\ ;\ b+(n-1)r\ ;\ b+nr\ ;\ b+(n+1)r\ ;\ \ldots$$

O termo $b+nr$ é dito o *termo geral* da progressão.

Numa progressão aritmética a diferença entre um dado termo e o seu antecessor é igual a razão, isto é: $\big(b+(n+1)r\big)-(b+nr)=r$ para todo $n\geq 0$. Essa, não só é uma maneira de determinar a razão da progressão aritmética, como também serve para verificar se a progressão dada é, de fato, uma progressão aritmética.

A soma dos n primeiros termos dessa progressão vale:

$$S_n=\underbrace{b+(b+r)+(b+2r)+(b+3r)+\cdots+\big(b+(n-1)r\big)}_{n\ termos}\,.$$

Assim,

$$\begin{array}{rl} S_n &= b+(b+r)+(b+2r)+(b+3r)+\cdots+\big(b+(n-1)r\big)\\ S_n &= \big(b+(n-1)r\big)+\cdots+(b+3r)+(b+2r)+(b+r)+b\\ \hline 2S_n &= n\big(2b+(n-1)r\big)\,. \end{array}$$

Consequentemente, temos que:

$$S_n = \frac{n\big(2b + (n-1)r\big)}{2} \quad \text{para todo } n \geq 1 \,.$$

Também podemos associar uma série a uma progressão aritmética, a saber:

$$\sum_{n\geq 0}(b+nr) = b + (b+r) + (b+2r) + (b+3r) + \cdots + (b+nr) + \cdots$$

No entanto, podemos mostrar[5] que essa série *nunca é somável*, a menos que o primeiro termo e a razão sejam nulos.

Exemplos

❄ $1 \;;\; 1+\frac{1}{2} \;;\; 1+\frac{2}{2} \;;\; 1+\frac{3}{2} \;;\; 1+\frac{4}{2} \;;\; 1+\frac{5}{2} \;;\; \cdots$
é uma progressão aritmética cujo primeiro termo vale 1 e cuja razão vale $1/2$.

❄ A soma S_n dos n primeiros termos da progressão do exemplo anterior vale:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{2}{2}\right) + \left(1+\frac{3}{2}\right) + \left(1+\frac{4}{2}\right) + \cdots + \left(1+\frac{n-1}{2}\right) \\ &= \frac{n\big(2+(n-1)\frac{1}{2}\big)}{2} = \frac{n(4+(n-1))}{4} = \frac{n(n+3)}{4} \,. \end{aligned}$$

❄ A progressão $1 \;;\; 2 \;;\; 3 \;;\; 4 \;;\; 5 \;;\; \cdots \;;\; n \;;\; \cdots$ é uma progressão aritmética tendo 1 como termo inicial e 1 como razão. A soma dos n primeiros termos dessa progressão vale:

$$1+2+3+4+5+\cdots+n = \frac{n\big(2+(n-1)\big)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

3 Sequências e séries

Uma *sequência* de números reais é uma lista ordenada de números reais

$$a_1 \;;\; a_2 \;;\; a_3 \;;\; a_4 \;;\; \ldots \;;\; a_n \;;\; \ldots$$

onde a_1 é o *primeiro elemento* da sequência, a_2 é o *segundo elemento*, a_3 é o *terceiro elemento*, ..., a_n é o *n-ésimo elemento* e assim sucessivamente. O n-ésimo elemento também é dito *termo geral* da sequência.

[5] Usando argumentos de Cálculo I não é difícil mostrar que a expressão $S_n = \frac{n\left(2b+(n-1)r\right)}{2}$ tende a ∞ ou $-\infty$ quando n cresce indefinidamente (isto é, $n \to \infty$), a menos que b e r sejam, ambos, nulos.

As progressões geométricas e aritméticas são exemplos de sequências de números reais. Outros exemplos são:

☞ $2 \; ; \; 3^2 \; ; \; 4^3 \; ; \; 5^4 \; ; \; 6^5 \; ; \; \dots \; ; \; (n+1)^n \; ; \; \dots$

☞ $5 \; ; \; -1 \; ; \; 2 \; ; \; 3^2 \; ; \; 4^2 \; ; \; 5^2 \; ; \; \dots \; ; \; n^2 \; ; \; \dots$

☞ $1 \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{3} \; ; \; \frac{1}{4} \; ; \; \frac{1}{5} \; ; \; \dots \; ; \; \frac{1}{n} \; ; \; \dots$

Uma sequência de números reais

$a_1 \; ; \; a_2 \; ; \; a_3 \; ; \; a_4 \; ; \; \dots \; ; \; a_n \; ; \; \dots$ também é denotada por $\big(a_n\big)_{n\geq 1}$.

A ela associamos uma série, como fizemos para as progressões, a saber:

$$\sum_{n\geq 1} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Essa série pode ser ou não somável, isso depende da sequência que lhe dá origem.

Uma maneira de saber se uma série é *convergente* (ou *somável*) é fazer o que fizemos com a série geométrica: determinamos a expressão da soma S_n dos n primeiros termos da sequência (o que nem sempre é possível explicitar de forma simples) e depois analizamos o que ocorre com essa expressão quando o número n de termos cresce indefinidamente. É o comportamento de S_n que dirá se a série é ou não somável. Se S_n se aproxima indefinidamente de um único valor real A, a medida que n cresce indefinidamente, diremos que a série é *somável* e que sua *soma* vale A. Caso contrário, ela é dita *não somável*, ou *divergente*.

Exemplos

❄ A soma S_n dos n primeiros termos da sequência

$$1-\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \quad ; \quad \cdots$$

vale

$$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}$$

a qual se aproxima de 1 quando n cresce indefinidamente, já que, nesse caso, $\frac{1}{n+1}$ se aproxima de *zero*. Isso significa que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \text{ é somável e } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

Como $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ para $n \neq -1\,,0$ concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \text{ é somável e } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1\,.$$

❄ A sequência

$$\frac{1}{2^2-1} \;\; ; \;\; \frac{1}{3^2-1} \;\; ; \;\; \frac{1}{4^2-1} \;\; ; \;\; \frac{1}{5^2-1} \;\; ; \;\; \dots \;\; ; \;\; \frac{1}{n^2-1} \;\; ; \;\; \dots$$

tem $\frac{1}{n^2-1}$ como seu termo geral que pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right\} \quad \text{quando } n \neq \pm 1\,. \tag{17.2}$$

A soma S_n dos n primeiros termos nos fornece:

$$S_n = \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\} = \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right\}$$

que tende para $3/4$ quando n cresce indefinidamente. Consequentemente, a série associada a essa sequência

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} \quad \text{é convergente e} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}\,.$$

Note que essa série não é uma série geométrica.

❄ O termo geral da sequência $1 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{3} \;;\; \frac{1}{4} \;;\; \frac{1}{5} \;;\; \dots \;;\; \frac{1}{n} \;;\; \dots$ é $1/n$ e a série a ela associada é a série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$ a qual é *divergente*[6]. Ela é denominada série *harmônica*.

Outros exemplos de séries divergentes, isto é, não somáveis, são:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 1+2+3+4+\cdots \quad ; \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots \quad ; \quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots \quad ; \quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{1-2n} = 1-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\cdots$$

4 Propriedades das séries

Mesmo sem saber exatamente como se define a *convergência* de uma série não geométrica de números reais, podemos manipular algebricamente com tais séries, usando algumas de suas propriedades, apresentadas a seguir.

[6] Você pode ver isso nas referências [5, 6, **?**].

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes então $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\, a_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ são convergentes.

Além disso, $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\, a_n) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente (resp. divergente) $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é convergente (resp. divergente).

No caso convergente, vale a igualdade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \text{onde } n_0 \geq 2\,.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é **divergente** então

$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\, b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + \lambda b_n)$ são **divergentes** quando $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$.

Exemplos

❄ As propriedades acima nos garantem que a série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n}\right)$ é convergente. Ela não é uma série geométrica mas, pode ser vista como soma de duas séries geométricas convergentes. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1/2}{1-1/2} + 2\,\frac{1/3}{1-1/3} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2\,.
\end{aligned}$$

❄ A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ é divergente e $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$ é convergente. Logo, são *divergentes* as seguintes séries:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad ; \quad \sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots \quad ; \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{10}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} 10\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} -\frac{1}{n} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n} + \frac{1}{n}\right) \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n} - \frac{1}{n}\right).$$

Exercícios resolvidos

1. **Verifique quais das progressões a seguir são progressões geométricas. Determine a soma dos n primeiros termos das duas primeiras progressões.**

   (a) Progressão de termo geral $3^{n/2}$ onde $n \geq 0$;

   (b) 2 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; $\ldots$

   (c) Progressão de termo geral $n!$ onde $n \geq 1$;

Solução

(a) Temos que $3^{\frac{n+1}{2}} \div 3^{\frac{n}{2}} = 3^{\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ para todo $n \geq 0$. Portanto, essa progressão é uma *pg* com razão $\sqrt{3}$. A soma S_n dos n primeiros termos 1 ; $3^{1/2}$; $3^{2/2}$; $3^{3/2}$; $\cdots$; $3^{(n-1)/2}$ vale

$$S_n = \frac{1-\left(\sqrt{3}\right)^n}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3^n})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3^n}-\sqrt{3^{n+1}}}{2} = \frac{\sqrt{3^{n+1}}+\sqrt{3^n}-\sqrt{3}-1}{2}.$$

(b) Comparando os três primeiros termos da progressão, temos que: $3^2 \div 2 \neq 3^3 \div 3^2$. Logo, essa progressão não é uma *pg*. No entanto, ela é uma *pg* com razão $r = 3$ a partir do segundo termo. Assim, a soma S_n dos n primeiros termos 2 ; $\underbrace{3^2 \; ; \; 3^3 \; ; \; 3^4 \; ; \; \cdots \; ; \; 3^n}_{n-1 \ termos}$ vale

$$S_n = 2 + 3^2 \times \frac{1-3^{n-1}}{1-3} = 2 + \frac{9}{2}(3^{n-1}-1) = 2 + \frac{3}{2}(3^n - 3) \quad \text{quando} \quad n \geq 2.$$

(c) Temos que $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} = n+1$ que depende de n. Consequentemente, a progressão em questão não é uma *pg*.

2. **Calcule o 15° termo da progressão geométrica cujo segundo termo vale 5 e cuja razão vale $5{,}1$.**

Solução O termo procurado é o 14° termo da *pg* de razão $r = 5{,}1$ e tendo 5 como primeiro termo. O n-ésimo termo dessa *pg* vale: $5r^{n-1} = 5 \times 5{,}1^{n-1}$. Fazendo $n = 14$ concluímos que o termo procurado vale $5 \times 5{,}1^{13}$.

3. **Seja $a \in \mathbb{R}$. Pergunta-se: existe uma progressão geométrica onde o termo inicial vale 2 e o nono termo vale a?**

Solução Se tal *pg* de razão r existe, o 9° termo precisa satisfazer a condição $2r^{9-1} = a$, ou seja, $r = \sqrt[8]{a/2}$. No entanto, uma tal razão não existe quando, por exemplo, $a = -1$. Portanto, a resposta à pergunta colocada é **NÃO**.

4. Compare a soma dos n primeiros termos das seguintes progressões:

$\mathbf{1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ \ldots}$ **e** $\mathbf{1\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ \ldots}$

Solução Para a primeira progressão, a soma S_n dos n primeiros termos vale

$$S_n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ parcelas} = n\,.$$

Para a segunda, a soma $\mathcal{S}_n$ pode assumir os seguintes valores:

$\mathcal{S}_1 = 1\ ;\ \mathcal{S}_2 = 0\ ;\ \mathcal{S}_3 = 1\ ;\ \mathcal{S}_4 = 0\ ;\ \mathcal{S}_5 = 1\ ;\ \mathcal{S}_6 = 0\ ;\ \cdots$

De fato, podemos expressar a soma dos termos dessa *pg* da seguinte forma :

$$\mathcal{S}_n = \begin{cases} 1 & \text{quando } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{quando } n \text{ é par}\,. \end{cases}$$

Quando o número n de termos cresce indefinidamente, as somas S_n e $\mathcal{S}_n$ têm comportamentos distintos :

- S_n cresce indefinidamente, ultrapassando todos os números reais ;
- $\mathcal{S}_n$ não cresce indefinidamente mas, fica oscilando, assumindo periodicamente os valores 1 e 0.

É por causa desse comportamento que elas são *não somáveis*, ou seja, *não convergentes*.

5. As séries geométricas a seguir são convergentes ?

(a) $\mathbf{1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots}$

(b) $\mathbf{0{,}9^{-2}+0{,}9^{-3}+0{,}9^{-4}+0{,}9^{-5}+\cdots}$

(c) $\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4+\cdots$

(d) $\boldsymbol{\pi-\pi^2+\pi^3-\pi^4+\pi^5-\pi^6+\cdots}$

Solução Para responder a pergunta precisamos saber se a razão r satisfaz ou não a condição $|r|<1$.

(a) Nesse caso $r=2>1$. Logo, a série é **divergente**.

(b) Aqui, a série é da forma $\sum_{n=2}^{\infty} 0{,}9^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{0{,}9}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{10}{9}\right)^n$ que é **divergente** pois a razão $r=\frac{10}{9}>1$.

(c) Nesse item, começamos com a seguinte análise:

$$\sqrt{5}-\sqrt{3}<\sqrt{2} \iff \sqrt{5}<\sqrt{3}+\sqrt{2} \iff 5<3+2+2\sqrt{6}=5+2\sqrt{6}\,.$$

Acabamos de mostrar que $\sqrt{5}-\sqrt{3}<\sqrt{2}$. Consequentemente, $0<\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<1$ o que mostra que a série geométrica em estudo é **convergente**.

(d) Nesse caso a razão $r=-\pi\notin(-1\,,1)$. Logo, a série é **divergente**.

6. Determine os valores de x para os quais as séries geométricas a seguir são somáveis e calcule a soma de cada uma delas. Determine também os valores de x para os quais elas não são somáveis.

(a) $2x + (2x)^2 + (2x)^3 + (2x)^4 + \cdots$

(b) $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \cdots$

(c) $\left(\frac{x}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{x}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{x}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{x}{3}\right)^{-4} + \cdots$

(d) $-1 + (x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4 + (x-1)^5 - (x-1)^6 + \cdots$

(e) $1 + \frac{1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^4 + \cdots$

Solução Note que em cada um dos itens, a razão r e o termo inicial b dependem da variável x.

(a) Essa série geométrica tem razão $r = 2x$ e primeiro termo $b = 2x$. Assim, ela é somável quando

$$|2x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$$

e temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n = \frac{2x}{1-2x} \quad \text{quando} \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

Quando $|x| \geq 1/2$ a série não é somável.

(b) Nesse caso a razão vale $r = x/3$ e o termo inicial $b = (x/3)^2$. Logo, a série será somável quando

$$\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \iff |x| < 3.$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{x^2/9}{1-x/3} = \frac{x^2}{3(3-x)} \quad \text{quando} \quad |x| < 3.$$

Quando $|x| \geq 3$ a série não é somável.

(c) Temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n$. Assim, a razão $r = 3/x$ e o termo inicial $b = 3/x$ estão bem definidos desde que $x \neq 0$. Para garantir a somabilidade da série devemos ter $|r| < 1$, ou seja:

$$\left|\frac{3}{x}\right| < 1 \iff |x| > 3.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{-n} = \frac{3/x}{1-3/x} = \frac{3x}{x-3} \quad \text{quando} \quad |x| > 3.$$

Para $0 < |x| \leq 3$ a série não é somável e quando $x = 0$ a série não está bem definida.

(d) Nesse item, temos que $r = -(x-1)$ e $b = -1$. Assim, para garantir a somabilidade, devemos ter:

$$|x-1| < 1 \iff x \in (0,2).$$

Consequentemente,

$$-1 + (x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4 + \cdots = \frac{-1}{1+(x-1)} = -\frac{1}{x} \quad \text{quando} \quad x \in (0,2).$$

Além disso, essa série diverge para $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$.

(e) Temos que $r = 1 + \dfrac{1}{x} = b$ estão bem definidos para $x \neq 0$. Para garantir a convergência, devemos ter:

$$\left|1+\frac{1}{x}\right| < 1 \iff -1 < 1 + \frac{1}{x} < 1 \iff -2 < \frac{1}{x} < 0 \iff x \in (-\infty, -1/2).$$

Concluímos então que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-1-\frac{1}{x}} = -(x+1) \quad \text{quando} \quad x \in (-\infty, -1/2).$$

Quando $x \in [-1/2, 0) \cup (0, \infty)$ a série não é somável. Para $x = 0$ ela não está bem definida.

7. **Escreva as dízimas periódicas abaixo na forma de uma fração de números inteiros, usando séries geométricas.**
(a) $0{,}210\overline{2}$ **(b) $13{,}\overline{023}$** **(c) $1{,}21\overline{232}$.**

Solução Escrevendo essas dízimas periódicas usando séries geométricas, obtemos:

(a) $$0{,}210\overline{2} = 10^{-3} \times 210{,}\overline{2} = 10^{-3} \times \left(210 + 2\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 2\times10^{-3} + \cdots\right)$$
$$= 10^{-3} \times \left(210 + \frac{2\times10^{-1}}{1-10^{-1}}\right) = 10^{-3} \times \left(210 + \frac{2}{9}\right)$$
$$= \frac{210\times9+2}{9000} = \frac{1.892}{9000}.$$

(b) $$13{,}\overline{023} = 13 + 23\times10^{-3} + 23\times10^{-6} + 23\times10^{-9} + \cdots)$$
$$= 13 + \frac{23\times10^{-3}}{1-10^{-3}} = 13 + \frac{23}{999}$$
$$= \frac{13\times999+23}{999} = \frac{13.010}{999}.$$

(c) $$1{,}21\overline{232} = 10^{-2}\times121{,}\overline{232} = 10^{-2}\times\left(121 + 232\times10^{-3} + 232\times10^{-6} + 232\times10^{-9} + \cdots\right)$$
$$= 10^{-2}\times\left(121 + \frac{232\times10^{-3}}{1-10^{-3}}\right) = 10^{-2}\times\left(121+\frac{232}{999}\right)$$
$$= \frac{121\times999+232}{99900} = \frac{121.111}{99900}.$$

8. **Verifique quais das progressões a seguir são progressões aritméticas:**

(a) **Progressão de termo geral** $2(n+1)$ **onde** $n \geq 0$ **;**

(b) **Progressão de termo geral** $3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ **onde** $n \geq 1$ **;**

(c) **Progressão de termo geral** $\dfrac{1+n}{n^2-1}$ **onde** $n \geq 2$

(d) **Progressão de termo geral** $\dfrac{n^2-1}{1+n}$ **onde** $n \geq 0$ **.**

Solução Temos que:

(a) $2\{(n+1)+1\}-2(n+1)=2$ para todo $n \geq 0$. Logo, a progressão em questão é uma *pa*.

(b) $3\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)-3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{3}{n+1}-\dfrac{3}{n}=\dfrac{3n-3n-3}{n(n+1)}=-\dfrac{3}{n(n+1)}$ que depende de n.

Concluímos então que essa progressão não é uma progressão aritmética.

(c) Note que $\dfrac{1+n}{n^2-1}=\dfrac{n+1}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}$ para $n \neq 1$. Assim, temos que

$$\frac{1+(n+1)}{(n+1)^2-1}-\frac{1+n}{n^2-1}=\frac{1}{(n+1)-1}-\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1} \quad \text{que depende de } n.$$

Consequentemente, a progressão desse item não é uma *pa*.

(d) Do item anterior temos que $\dfrac{n^2-1}{1+n}=n-1$ para $n \neq -1$. Assim, $\big((n+1)-1\big)-(n-1)=-1$. Consequentemente, a progressão é uma *pa*.

9. **Mostre que a sequência** $(a_n)_{n\geq 1}$ **onde** $a_n = 1/n$ **não é uma progressão geométrica, nem aritmética.**

Solução Essa sequência não é uma progressão geométrica pois:

$$\frac{1}{n+1} \div \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1} \quad \text{não é uma constante (depende de } n\text{)}.$$

Ela também não é uma progressão aritmética pois:

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}=-\frac{1}{n(n+1)} \quad \text{não é uma constante (depende de } n\text{)}.$$

10. **Considere a sequência** $(a_n)_{n\geq 0}$ **definida por**

$$a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{na_n-(n+1)}{(n+2)^2} \quad \text{para todo } n \geq 0. \tag{17.3}$$

(1) Calcule a_i para $i = 1, 2, 3, 4$;

(2) Relacione a_n e a_{n-1} para $n \geq 1$.

Solução Da definição de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ concluímos que:

(1) Fazendo $n = 0, 1, 2, 3, 4$ em (17.3) obtemos

$$a_1 = a_{0+1} = \frac{0 \times a_0 - (0+1)}{(0+2)^2} = -\frac{1}{4}\,;$$

$$a_2 = a_{1+1} = \frac{1 \times a_1 - (1+1)}{(1+2)^2} = \frac{a_1 - 2}{9} = -\frac{1/4 + 2}{9} = -\frac{9/4}{9} = -\frac{1}{4}\,;$$

$$a_3 = a_{2+1} = \frac{2 \times a_2 - (2+1)}{(2+2)^2} = \frac{2a_2 - 3}{16} = -\frac{1/2 + 3}{16} = -\frac{7/2}{16} = -\frac{7}{32}\,;$$

$$a_4 = a_{3+1} = \frac{3 \times a_3 - (3+1)}{(3+2)^2} = \frac{3a_2 - 4}{25} = -\frac{21/32 + 4}{25} = -\frac{21/32 + 128/32}{25} = -\frac{149}{32 \times 25}\,.$$

(2) Quando $n \geq 1$, segue que $n - 1 \geq 0$ e podemos concluir de (17.3) que

$$a_n = a_{(n-1)+1} = \frac{(n-1)a_{n-1} - \big((n-1)+1\big)}{(n-1)+2\big)^2} = \frac{(n-1)a_{n-1} - n}{(n+1)^2}$$

o que exprime a relação entre a_n e a_{n-1} quando $n \geq 1$.

11. **Dê a expressão da n-ésima parcela das seguintes séries:**

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$ **(b)** $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \cdots$

(c) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \cdots$ **(d)** $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \frac{81}{32} + \cdots$.

Solução Enumerando as parcelas, obtemos:

(a) $1\ ;\ \frac{1}{2\times\mathbf{2}-1}\ ;\ \frac{1}{2\times\mathbf{3}-1}\ ;\ \frac{1}{2\times\mathbf{4}-1}\ ;\ \cdots\ ;\ \frac{1}{2\times\boldsymbol{n}-1}$

(b) $\frac{2+\mathbf{1}}{4}\ ;\ \frac{2+\mathbf{2}}{(2+\mathbf{1})^2}\ ;\ \frac{2+\mathbf{3}}{(2+\mathbf{2})^2}\ ;\ \frac{2+\mathbf{4}}{(2+\mathbf{3})^2}\ ;\ \cdots\ ;\ \frac{2+\boldsymbol{n}}{\big(2+(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\big)^2}$

(c) $1\ ;\ \frac{1}{1+\mathbf{2}}\ ;\ \frac{1}{1+2+\mathbf{3}}\ ;\ \frac{1}{1+2+3+\mathbf{4}}\ ;\ \cdots\ ;\ \frac{1}{1+2+3+\cdots+\boldsymbol{n}} = \frac{2}{n(n+1)}$

(d) $\frac{3^{\mathbf{1}}}{2^{\mathbf{2}}}\ ;\ \frac{3^{\mathbf{2}}}{2^{\mathbf{3}}}\ ;\ \frac{3^{\mathbf{3}}}{2^{\mathbf{4}}}\ ;\ \frac{3^{\mathbf{4}}}{2^{\mathbf{5}}}\ ;\ \cdots\ ;\ \frac{3^{\boldsymbol{n}}}{2^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}}.$

Assim, os n-ésimos termos são, respectivamente,

$$\frac{1}{2n-1}\ ;\ \frac{2+n}{(2+(n-1))^2}\ ;\ \frac{2}{n(n+1)}\ ;\ \frac{3^n}{2^{n+1}}\,.$$

12. Dê uma expressão para a soma dos n primeiros termos da sequência

$$\mathbf{1\ ;\ 2\ ;\ -3\ ;\ 4\ ;\ 10\ ;\ 10^2\ ;\ 10^3\ ;\ \cdots\ ;\ 10^k\ ;\ \cdots}$$

que seja verdadeira para todo $n \geq 4$.

Solução Essa sequência é uma progressão geométrica, a partir do 5° termo. Assim, quando $n \geq 5$ a soma S_n dos n primeiros elementos pode ser feita da seguinte forma: somamos os quatro primeiros elementos com a soma dos $n-4$ primeiros elementos da *pg* de razão e termo inicial iguais a 10. Assim, obtemos:

$$S_n = 1+2-3+4+10\times\frac{1-10^{n-4}}{1-10} = 4+10\times\frac{1-10^{n-4}}{1-10} = 4+10\times\frac{10^{n-4}-1}{9} \quad \text{quando } n \geq 4\,.$$

☛ Note que essa expressão para S_n não é verdadeira para $n = 1\,,2$ e 3.

13. Mostre que as séries a seguir são convergentes e calcule as suas somas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5^n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2-5n+6}$

Solução Nas séries que não são séries geométricas vamos calcular a soma S_n das n primeiras parcelas e analizar o seu comportamento quando n cresce indefinidamente.

(a) Temos que $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{0}+\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\cdots = \frac{3}{2}+1+\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\cdots$

é uma série geométrica cuja razão $r = 2/3$ e cujo termo inicial vale $3/2$. Como $|r| < 1$ segue que a série é convergente e sua soma vale

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{b}{1-r} = \frac{3/2}{1-2/3} = \frac{3/2}{1/3} = \frac{9}{2}\,.$$

(b) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}3^{-n} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = 1/3$ e termo inicial $b = 1/3$. Como $|r| < 1$, segue que a série é convergente, e

$$\sum_{n\geq 1}3^{-n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}\,.$$

(c) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 4}\frac{1}{\sqrt[3]{5^n}} = \sum_{n\geq 4}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^n} = \sum_{n\geq 4}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = 1/\sqrt[3]{5}$ e termo inicial $b = 1/5\sqrt[3]{5}$. Como $|r| < 1$, segue que a série é convergente, e

$$\sum_{n\geq 4}\frac{1}{\sqrt[3]{5^n}} = \frac{1/5\sqrt[3]{5}}{1-1/\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{5\left(\sqrt[3]{5}-1\right)}\,.$$

(d) Vimos na página 343 que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é convergente. Consequentemente, segue das propriedades das séries que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)}$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \pi\,.$$

(e) Imitando a decomposição que fizemos da expressão (17.2), na página 344, temos:

$$\frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right\} \quad \text{para todo} \quad n \neq \pm 2\,.$$

Assim, a soma S_n dos n termos $\dfrac{1}{3^2-4} + \dfrac{1}{4^2-4} + \cdots + \dfrac{1}{n^2-4} + \dfrac{1}{(n+1)^2-4} + \dfrac{1}{(n+2)^2-4}$ vale

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left\{1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \cdots\right.\\
&\quad\left.\cdots + \frac{1}{n-4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right\}\\
&\quad = \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right\}
\end{aligned}$$

isto é,

$$S_n = \frac{1}{4}\left\{\frac{25}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right\}$$

que tende para $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{25}{12}$ quando n cresce indefinidamente. Mostramos assim, que a série em estudo é convergente e

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4} = \frac{25}{48}\,.$$

(f) Temos que

$$\frac{1}{n^2-5n+6} = \frac{1}{(n-3)(n-2)} = \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} \quad \text{quando} \quad n \neq 2\,,3\,.$$

Assim,

$$\sum_{n\geq 4}\frac{1}{n^2-5n+6} = \sum_{n\geq 4}\left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2}\right). \tag{17.4}$$

Fazendo a mudança de variável $k = n-3$, resulta que:

- $n = 4 \iff k = 1$;
- $n-3 = k$ e $n-2 = k+1$.

A série acima, escrita em termos da nova variável k , toma a forma[7]:

$$\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1\,.$$

Concluímos então que a série $\displaystyle\sum_{n\geq 4}\frac{1}{n^2-5n+6}$ é convergente e sua soma vale 1 .

14. **Quais das afirmações a seguir são falsas ?**

(a) Se $b>0$ e $r\neq 0$ então todas as parcelas da série $\sum_{n=1}^{\infty} br^n$ são positivas ;

(b) Se $b>0$ e $|r|<1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} br^n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} br^n>0$;

(c) A série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-3}$ é convergente ;

(d) A série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ é divergente ;

(e) A soma, termo a termo, de duas séries divergentes é uma série divergente .

Solução

(a) Essa afirmação é **falsa** pois quando $b>0$ e $r=-1$ os termos br^n são negativos sempre que n for ímpar .

(b) Como $|r|<1$ segue que essa série geométrica é convergente e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} br^n=\frac{b}{1-r}$. Além disso, sendo $r<1$, temos que $1-r>0$. Assim, como $b>0$, segue que $\dfrac{b}{1-r}>0$ e, portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} br^n>0$.

Concluímos então que a afirmação é **verdadeira**.

(c) Considere a mudança de variável $n=k+2$. Assim: $n=2 \iff k=0$. Consequentemente,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2(k+2)-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

que como já vimos é divergente. Logo, a afirmação é **falsa**.

(d) Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \quad \text{é divergente pois} \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \quad \text{é divergente .}$$

Logo, a afirmação é **verdadeira**.

(e) Essa afirmação é **falsa** pois, como já vimos, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\} \quad \text{é convergente}$$

[7]Você também pode ver isso diretamente da expressão no membro direito de (17.4). Basta escrevê-la termo a termo.

mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n+1} \quad \text{são divergentes}\,.$$

15. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^n = 1 + \frac{1}{x} + \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^2 + \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^3 + \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^4 + \cdots$$

(a) Para quais valores de x essa série converge ?

(b) Resolva a inequação

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^n \le 2x\,.$$

Solução A série dada é a série geométrica associada a progressão geométrica de

$$\textit{primeiro termo}:\ 1+\frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \textit{razão}:\ 1+\frac{1}{x}\,.$$

(a) Já vimos que uma tal série converge se, e somente se, sua razão satisfaz a condição:

$$-1 < 1+\frac{1}{x} < 1\,.$$

Assim, para garantir a convergência, devemos ter:

- $1+\dfrac{1}{x} < 1 \iff \dfrac{1}{x} < 0 \iff x < 0\,;$
- Além disso, para $x \neq 0$ temos:

$$1+\frac{1}{x} > -1 \iff \frac{1}{x} > -2 \iff \frac{x^2}{x} > -2x^2$$
$$\iff 2x^2 + x > 0 \iff x(2x+1) > 0\,.$$

Lembramos que o trinômio do segundo grau $x(2x+1)$ é positivo fora do intervalo definido pelas suas raízes que são 0 e $-1/2$. Isto é, $x(2x+1) > 0$ se, e somente se, $x \in (-\infty\,,-1/2\,)\cup(\,0\,,\infty)$.

Combinando as soluções das duas inequações acima resolvidas, concluímos:

$$-1 < 1+\frac{1}{x} < 1 \iff x \in (-\infty\,,-1/2\,).$$

Assim, a resposta do item (a) é a seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^n \ \text{converge} \iff x \in (-\infty\,,-1/2\,).$$

(b) No item anterior determinamos o domínio de convergência da série. Agora, podemos concluir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x}}=-(x+1)\quad\text{quando}\quad x\in(-\infty\,,-1/2\,).$$

Assim, no intervalo $(-\infty\,,-1/2\,)$ a inequação

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\leq 2x\quad\text{toma a forma}\quad-(x+1)\leq 2x\,.$$

Donde concluímos:

$$-(x+1)\leq 2x\iff 2x\geq -x-1\iff 3x\geq -1\iff x\geq -1/3.$$

Portanto, as soluções para a inequação proposta são os pontos do intervalo $(-1/3\,,-1/2\,)$ e a solução da questão está terminada.

16. Admitindo que o limite $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\cdots}}}}$ **existe, pergunta-se: quanto vale ?**

Solução

Admitamos então que o limite em questão existe e denotemo-lo por z.

Assim, explorando a periodicidade da expressão, obtemos a seguinte relação

$$z=\frac{1}{1+2z}\,.$$

Para $z\neq -1/2$ temos:

$$z=\frac{1}{1+2z}\iff z(1+2z)=1\iff 2z^2+z-1=0$$
$$\iff z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times 2\times(-1)}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}\,.$$

Como o limite acima não pode ser negativo, concluímos que o seu valor é $\dfrac{-1+3}{4}=1/2\,.$

17. Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^n=1+\left(1-\frac{1}{2^x}\right)+\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^4+\cdots$$

(a) Para quais valores de x essa série converge ?

(b) Resolva a inequação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^n \leq 4^{x^2-1}\,.$$

Solução A série dada é a série geométrica associada a progressão geométrica de

$$primeiro\ termo:\ 1 \qquad \text{e} \qquad razão:\ 1-\frac{1}{2^x}\,.$$

(a) Já vimos que uma tal série converge se, e somente se, sua razão satisfaz a condição:

$$-1<1-\frac{1}{2^x}<1\,.$$

Assim, para garantir a convergência, devemos ter:

- $1-\frac{1}{2^x}<1 \iff -\frac{1}{2^x}<0 \iff \frac{1}{2^x}>0$ que é verdadeira para todo $x\in\mathbb{R}$.
  Consequentemente, essa primeira desigualdade é satisfeita por todos os números reais.
- Além disso, será necessário que:
  $1-\frac{1}{2^x}>-1 \iff 2>\frac{1}{2^x} \iff 2>2^{-x} \iff 1>-x \iff x>-1.$

Combinando as soluções das duas inequações acima resolvidas, concluímos:

$$-1<1-\frac{1}{2^x}<1 \iff x\in(-1\,,\infty).$$

Assim, a resposta do item (a) é a seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^n \ \text{converge} \iff x\in(-1\,,\infty).$$

(b) No item anterior determinamos o intervalo de convergência da série. Agora, podemos concluir que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^n=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{2^x}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2^x}}=2^x \quad \text{quando} \quad x\in(-1\,,\infty).$$

Portanto, no intervalo $(-1\,,\infty)$ a inequação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \leq 4^{x^2-1} \quad \text{toma a forma} \quad 2^x\leq 4^{x^2-1}\,.$$

Donde concluímos:

$$\begin{aligned} 2^x\leq 4^{x^2-1} &\iff 2^x\leq\left(2^2\right)^{x^2-1} \iff 2^x\leq 2^{2x^2-2}\\ &\iff x\leq 2x^2-2 \iff 2x^2-x-2\geq 0\,. \end{aligned}$$

Sabemos que o trinômio $2x^2 - x - 2$ é positivo fora do intervalo das raízes que, nesse caso, valem:

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Isto é,

$$2x^2 - x - 2 \geq 0 \iff x \in \Big(-\infty\,, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\Big) \cup \Big(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\,, \infty\Big).$$

Agora, precisamos saber quais desses valores de x estão no intervalo $(-1\,,\infty)$. Para isso, observamos:

- Evidentemente, $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} > -1$ ou seja, $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \in (-1\,,\infty)$
- Além disso,

$$\frac{1-\sqrt{17}}{4} > -1 \iff 1 - \sqrt{17} > -4 \iff 1 + 4 > \sqrt{17} \iff 25 > 17$$

o que mostra que $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \in (-1\,,\infty)$.

Portanto, o conjunto solução da inequação proposta é:

$$(-1\,,\infty) \cap \Big[\Big(-\infty\,, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\Big) \cup \Big(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\,, \infty\Big)\Big] = \Big(-1\,, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\Big) \cup \Big(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\,, \infty\Big).$$

18. Considere a série $1 + \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{\pi^2}{x^2} + \dfrac{\pi^3}{x^3} - \dfrac{\pi^4}{x^4} + \cdots$

(a) Para quais valores da variável x a série acima é convergente ?

(b) Calcule $1 + \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{\pi^2}{x^2} + \dfrac{\pi^3}{x^3} - \dfrac{\pi^4}{x^4} + \cdots$;

(c) Resolva a equação $1 + \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{\pi^2}{x^2} + \dfrac{\pi^3}{x^3} - \dfrac{\pi^4}{x^4} + \cdots = x$;

(d) Resolva a inequação $1 + \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{\pi^2}{x^2} + \dfrac{\pi^3}{x^3} - \dfrac{\pi^4}{x^4} + \cdots \leq x$.

Solução Consideremos a série

$$1 + \frac{\pi}{x} - \frac{\pi^2}{x^2} + \frac{\pi^3}{x^3} - \frac{\pi^4}{x^4} + \cdots$$

Trata-se de uma série geométrica a partir da segunda parcela, cuja razão vale $-\pi/x$.

(a) Essa série é convergente se, e somente se,

$$-1 < -\frac{\pi}{x} < 1 \iff -1 < \frac{\pi}{x} < 1 \iff \Big|\frac{\pi}{x}\Big| < 1 \iff \frac{\pi}{|x|} < 1$$
$$\iff |x| > \pi \iff x \in (-\infty\,, -\pi\,) \cup (\,\pi, \infty).$$

(b) Para $x \in (-\infty\,, -\pi\,) \cup (\,\pi, \infty)$ temos que:

$$1 + \frac{\pi}{x} - \frac{\pi^2}{x^2} + \frac{\pi^3}{x^3} - \frac{\pi^4}{x^4} + \cdots = 1 + \frac{\pi/x}{1-(-\pi/x)} = 1 + \frac{\pi/x}{1+\pi/x} = 1 + \frac{\pi}{\pi + x}\,.$$

(c) Novamente, para $x \in (-\infty\,, -\pi\,) \cup (\,\pi, \infty)$ temos que:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\pi}{x} - \frac{\pi^2}{x^2} + \frac{\pi^3}{x^3} - \frac{\pi^4}{x^4} + \cdots = x \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 + \frac{\pi}{\pi + x} = x \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi + x = \pi x + x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 + (\pi - 1)x - 2\pi = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1 - \pi \pm \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi}}{2}\,. \end{aligned}$$

No entanto, os cálculos a seguir nos mostram que:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \pi + \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi}}{2} > \pi \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - \pi + \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi} > 2\pi \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi} > 3\pi - 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\pi-1)^2 + 8\pi > 9\pi^2 - 6\pi + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 12\pi > 8\pi^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 > 2\pi\,. \end{aligned}$$

Concluímos daí que $\dfrac{1 - \pi + \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi}}{2}$ não está no domínio de convergência da série em questão. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \pi - \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi}}{2} < -\pi \quad &\Longleftrightarrow \quad \pi - 1 + \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi} > 2\pi \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi} > \pi + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\pi-1)^2 + 8\pi > \pi^2 + 2\pi + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 6\pi > 2\pi \\ &\Longleftrightarrow \quad 6 > 2\,. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\dfrac{1 - \pi - \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi}}{2}$ está no domínio de convergência da série. Portanto, a única solução da equação estudada é:

$$x = \frac{1 - \pi - \sqrt{(\pi-1)^2 + 8\pi}}{2}\,.$$

(d) Para resolver a inequação

$$1 + \frac{\pi}{x} - \frac{\pi^2}{x^2} + \frac{\pi^3}{x^3} - \frac{\pi^4}{x^4} + \cdots \le x \tag{17.5}$$

observamos que:

$$1 + \frac{\pi}{x} - \frac{\pi^2}{x^2} + \frac{\pi^3}{x^3} - \frac{\pi^4}{x^4} + \cdots \le x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \frac{\pi}{\pi + x} \le x$$

quando $x \in (-\infty\,,-\pi\,) \cup (\,\pi,\infty)$.

Assim sendo, para resolver (17.5) precisamos estudar o sinal da expressão

$$1+\frac{\pi}{\pi+x}-x \quad \text{em} \quad (-\infty\,,-\pi\,)\cup(\,\pi,\infty). \tag{17.6}$$

Vimos que essa expressão só se anula em $\dfrac{1-\pi-\sqrt{(\pi-1)^2+8\pi}}{2} \in (-\infty,-\pi\,)$. Além disso, como trata-se de uma expressão que varia continuamente em todo o seu domínio de definição, temos a seguinte informação sobre a sua distribuição de sinais:

- Avaliando a expressão (17.6) em $x=2\pi \in (\pi\,,\infty)$ obtemos:
  $1+\dfrac{\pi}{\pi+x}-x\Big]_{x=2\pi} = 1+\dfrac{\pi}{\pi+2\pi}-2\pi = 1+\dfrac{1}{3}-2\pi = \dfrac{4}{3}-2\pi < 0\ (-)$;
- Note que a expressão (17.6) tende para ∞ quando x tende para $-\infty$. Logo, o sinal de (17.6) a esquerda de $\dfrac{1-\pi-\sqrt{(\pi-1)^2+8\pi}}{2}$ será positivo.
- Além disso, quando x tende a $-\pi$ por valores menores do que $-\pi$ a expressão (17.6) tende para $-\infty$. Conseqüentemente, o sinal de (17.6) entre $-\pi$ e $\dfrac{1-\pi-\sqrt{(\pi-1)^2+8\pi}}{2}$ será negativo.

Temos assim, o seguinte quandro de sinais para a expressão (17.6):

$+ + + +$ **0** $- - - - -$	**nd**	$- - - - - - -$	*sinal de*
$\frac{1-\pi-\sqrt{(\pi-1)^2+8\pi}}{2}$	$-\pi$	π	$1+\frac{\pi}{\pi+x}-x$

Isso nos permite concluir que:

$$1+\frac{\pi}{x}-\frac{\pi^2}{x^2}+\frac{\pi^3}{x^3}-\frac{\pi^4}{x^4}+\cdots \le x \quad \Longleftrightarrow \quad x\in\Big(\frac{1-\pi-\sqrt{(\pi-1)^2+8\pi}}{2}\,,-\pi\Big)\cup(\pi\,,\infty)$$

o que finaliza a solução da questão.

19. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)^n = 1-\frac{1}{x^2}+\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)^2+\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)^3+\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)^4+\cdots$$

(a) Para quais valores de x essa série converge ?

(b) Resolva a inequação

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)^n \le\ x\,.$$

Solução A série dada é a série geométrica associada a progressão geométrica de

$$\textit{primeiro termo}:\ 1-\frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \textit{razão}:\ 1-\frac{1}{x^2}\,.$$

(a) Já vimos que uma tal série converge se, e somente se, sua razão satisfaz a condição:

$$-1 < 1 - \frac{1}{x^2} < 1\,.$$

Assim, para garantir a convergência, devemos ter:

- $1 - \dfrac{1}{x^2} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{x^2} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 0\,;$
- Além disso, devemos ter:

$$1 - \frac{1}{x^2} > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 > \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - \frac{1}{2} > 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad \Big(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) > 0$$

o que ocorre se, e somente se, $x \in \big(-\infty\,, -\sqrt{2}/2 \big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,, \infty \big)\,.$

Lembramos que o trinômio do segundo grau $x^2 - 1/2$ é positivo fora do intervalo definido pelas suas raízes que são $\pm\sqrt{2}/2\,.$

Combinando as soluções das duas inequações acima resolvidas, concluímos:

$$-1 < 1 - \frac{1}{x^2} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \big(-\infty\,, -\sqrt{2}/2 \big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,, \infty \big)\,.$$

Assim, a resposta do item (a) é a seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)^n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \big(-\infty\,, -\sqrt{2}/2 \big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,, \infty \big).$$

(b) No item anterior determinamos o domínio de convergência da série. Agora, podemos concluir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)^n = \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{1 - \Big(1 - \dfrac{1}{x^2}\Big)} = \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = x^2 - 1$$

quando $x \in \big(-\infty\,, -\sqrt{2}/2 \big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,, \infty \big)$. Assim, em $\big(-\infty\,, -\sqrt{2}/2 \big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,, \infty \big)$ a inequação

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)^n \leq x \quad \text{toma a forma} \quad x^2 - 1 \leq x\,.$$

Por outro lado:

$$x^2 - 1 \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

onde as extremidades do intervalo acima são as raízes de $x^2 - x - 1\,.$

Agora, precisamos saber qual é a parte do intervalo acima que está contido no domínio de convergência da série em questão. Para isso precisamos comparar $-\sqrt{2}$ com $1 - \sqrt{5}$ e $\sqrt{2}$ com $1 + \sqrt{5}$.

Sabemos que $\sqrt{2} < 1 + \sqrt{5}$.

Além disso, temos que:

$$1 - \sqrt{5} < -\sqrt{2} \iff \sqrt{2} < \sqrt{5} - 1 \iff 2 < 5 - 2\sqrt{5} + 1 \iff 2 < 6 - 2\sqrt{5}$$
$$\iff 2\sqrt{5} < 4 \iff \sqrt{5} < 2 \iff 5 < 4 \quad \text{(o que é falso)}.$$

Isso mostra que $-\sqrt{2} < 1 - \sqrt{5}$.

Portanto, a solução para a inequação dada é o intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$.

20. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^n = 1 - \frac{2}{x} + \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{2}{x}\right)^4 + \cdots$$

(a) Para quais valores de x essa série converge ?

(b) Dê a distribuição de sinais dessa série em seu domínio de convergência.

Solução A série dada é a série geométrica associada a progressão geométrica de

$$\textit{primeiro termo}: \ 1 - \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad \textit{razão}: \ 1 - \frac{2}{x} .$$

➙ (a) Já vimos que uma tal série converge se, e somente se, sua razão satisfaz a condição:

$$-1 < 1 - \frac{2}{x} < 1 .$$

Assim, para garantir a convergência, devemos ter:

- $1 - \frac{2}{x} < 1 \iff \frac{2}{x} > 0 \iff x > 0$;
- Além disso, devemos ter:

$$1 - \frac{2}{x} > -1 \iff \frac{2}{x} < 2 \iff \frac{1}{x} < 1 .$$

Como do primeiro item já havíamos concluído que $x > 0$, do segundo concluímos que $x > 1$.

Assim, a resposta do item (a) é a seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^n \ \text{converge} \iff x \in (1, \infty).$$

➙ (b) No item anterior determinamos o intervalo de convergência da série. Agora, podemos concluir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^n = \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = \frac{x-2}{2}$$

quando $x \in (1, \infty)$. Assim, em $(1, \infty)$ a distribuição de sinais da série em questão é:

- ela é positiva quando $x > 2$;
- ela é negativa quando $x < 2$;
- e se anula quando $x = 2$.

Exercícios

1. Determine o 5º termo da progressão geométrica cujo primeiro termo é -2/3 e cuja razão é 7.

2. Determine o 105º termo da progressão geométrica cujo 5º termo é -2/5 e cuja razão é -2.

3. Determine o 25º termo da progressão geométrica cujo 5º e 11º termos valem respectivamente 1/5 e cuja razão é -2.

4. Conhecendo as estimativas

$$1,2 < \sqrt[3]{2} < 1,3 \quad \text{e} \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

faça uma estimativa para

(a) $1 + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} + \left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots$

(b) $1 - \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} + \left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots$

5. Mostre que numa progressão geométrica de primeiro termo a_1 e n-ésimo termo a_n, o produto P_n dos n primeiros termos é dado por

$$P_n = \sqrt{(a_1 \times a_n)^n}\ .$$

6. Calcule as somas infinitas a seguir e determine os valores de x para os quais elas estão bem definidas.

(a) $x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots$

(b) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5} + \cdots$

(c) $x - 2x^3 + 3x^5 - 2x^7 + 3x^9 - 2x^{11} + \cdots$

7. Resolva a inequação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \cdots \leq x\ .$$

8. Resolva a equação

$$\sqrt{x + x^2 + x^3 + \cdots} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

9. Determine o domínio de definição das expressões a seguir.

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x^4} + \cdots}$

(b) $(x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots)^x$.

10. Considere a progressão geométrica

$$a\ ;\ ar\ ;\ ar^2\ ;\ ar^3\ ;\ ar^4\ ;\ \ldots$$

onde $a\,,r \in \mathbb{R}$.

(1) Determine o n-ésimo termo da progressão em função do primeiro termo e da razão;

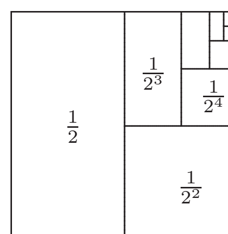
(2) Determine o n-ésimo termo da progressão em função do segundo termo e da razão;

(3) Determine o n-ésimo termo da progressão em função do terceiro termo e da razão;

(4) Determine o $n+k$-ésimo termo da progressão em função do k-ésimo termo e da razão, onde $n\,,k \in \mathbb{Z}^+$.

11. Mais uma *Demonstração sem Palavras*, desta vez para a série geométrica[8]

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = 1\ .$$



Explique como você vê essa *demonstração*.

12. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| > 1$. Calcule

(1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \cdots$

(2) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{a^4} + \cdots + \dfrac{1}{a^n} + \cdots$

(3) $\dfrac{1}{|a|} + \dfrac{1}{|a|^2} + \dfrac{1}{|a|^3} + \dfrac{1}{|a|^4} + \dfrac{1}{|a|^5} \cdots$

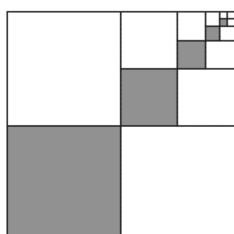
(4) $\dfrac{1}{|a|} - \dfrac{1}{|a|^2} + \dfrac{1}{|a|^3} - \dfrac{1}{|a|^4} + \dfrac{1}{|a|^5} \cdots$

(5) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{a^5} \cdots$

[8] Autor: Warren Pare, Extraído de *Proofs without words*, de Roger B. Nelsen, The Mathematical Association of America.

13. Mais uma *Demonstração sem Palavras*, desta vez para a série geométrica[9]

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\cdots=\frac{1}{3}.$$



Explique como você vê essa *demonstração*.

14. Sejam $a\,,b\geq 0$ e $n>1$. Calcule

(1) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}}}}$

(2) $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\ldots}}}}}}$

(3) $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\ldots}}}}}}$

(4) $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{b\sqrt[n]{a\sqrt[n]{b\sqrt[n]{a\sqrt[n]{b\ldots}}}}}}$

15. Resolva a equação

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\cdots=48\,.$$

16. Resolva a equação

$$x+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots=1\,.$$

17. Resolva a inequação

$$x+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots<1\,.$$

18. Sejam $a\,,b\in(-1\,,1)$. Sabendo que
$1+a^2+a^3+a^4+\cdots=A\,,$
$1+b^2+b^3+b^4+\cdots=B$
mostre que

$$1+ab+a^2b^2+a^3b^3+\cdots=\frac{AB}{A+B-1}\,.$$

19. Simplifique as expressões

(a) $\dfrac{1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n}$;

(b) $\dfrac{1+x^3+x^6+x^9+\cdots+x^{3n}}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n}$;

(c) $\dfrac{1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n}$;

(d) $\dfrac{1+x^3+x^6+x^9+\cdots}{1+x+x^2+x^3+\cdots}$;

(e) $\dfrac{1-x^3+x^6-x^9+\cdots}{1-x+x^2-x^3+\cdots}$;

(f) $\dfrac{1+x^2+x^4+x^6+\cdots}{1-x+x^2-x^3+\cdots}$.

20. Calcule $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$

21. Calcule $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}}$

22. Sabendo que $a>0$, calcule

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cdots}}}}}$$

[9]Autor: Sunday A. Ajose, Extraído de *Proofs without words*, de Roger B. Nelsen, The Mathematical Association of America.

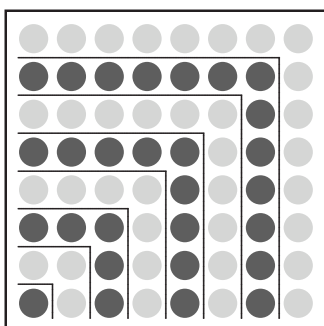
23. Determine o 5º termo da progressão aritmética cujo primeiro termo é -2/3 e cuja razão é 7.

24. Determine o 25º termo da progressão aritmética cujo 5º e 11º termos valem respectivamente 1/5 e cuja razão é -2.

25. Calcule a soma dos n primeiros números ímpares positivos.

26. O diagrama[10] a seguir é mais uma *Demonstração sem Palavras* do seguinte fato:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$



27. Determine o domínio de convergência da série $\sum_{n\geq 0}(1-x)^n$ e dê a expressão da sua soma nesse domínio.

28. Considere a inequação

$$1 + \frac{2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{8}{(x-1)^3} + \frac{16}{(x-1)^4} + \cdots \leq x\,. \tag{17.7}$$

(a) Determine para quais valores reais de x a expressão no membro esquerda de (17.7) está bem definido ;

(b) Resolva a inequação (17.7).

29. Determine o domínio de definição da expressão

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x^4} + \cdots}$$

[10] Autor: Nicomachus de Gerasa (circa A.D 100). Capa do livro *Proofs without words* de Roger B. Nelsen.

Referências Bibliográficas

[1] T.M. Apostol, *Calculus*, Vol. I, 2ª Ed., John Wiley & Sons, 1967.

[2] T.M. Apostol, *Calculus*, Vol. II, 2ª Ed., John Wiley & Sons, 1969.

[3] P.R. Halmos, *Teoria ingênua dos conjuntos*, Ed. USP, São Paulo, 1970.

[4] H. Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora da UNICAMP, 1997.

[5] E.L. Lima, *Análise Real*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1993.

[6] E.L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, 1989.

[7] R.G. Bartle, *Elementos de Análise Real*, Ed. Campus, RJ (1983).

[8] W. Rudin, *Princícipios de Análise Matemática*, Ed. UnB e Ed. Ao Livro Técnico, 1971.

[9] M. Spivak, *Calculus*, N. York, W.A. Benjamin, 1967.

[10] M.H. Protter and C.B. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, 2nd Edition, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1993.

[11] G. Ávila, *Análise Matemática para Licenciatura*, Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

[12] G. Ávila, *Introdução às Funções e à Derivada*, Editora Atual, 1997.

Índice Remissivo